الأوائل

رياضيات

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسي الأول

....

الأستاذ / طارق عبد الجليل

حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب

(١) فى الزوج المرتب (أ، ب)
يسمى أ بالمسقط الأول أو الإحداثى السينى
و يسمى ب بالمسقط الثانى أو الإحداثى الصادى

(٢) الزوج المرتب (أ، ب) $\neq$ (ب، أ)

(٣) الزوج المرتب (أ، ب) $\neq$ {أ، ب}

(٤) إذا كان الزوج المرتب (أ، ب) = (س، ص)
فإن أ = س ، ب = ص

أوجد قيمة المجهول فيما يأتى

(١) (أ، ب) = (٣، ٧)

أ = ٣ ، ب = ٧

(٢) (أ - ٢، ٣) = (٥، ب + ١)

أ - ٢ = ٥	ب + ١ = ٣
أ = ٥ + ٢	ب = ٣ - ١
أ = ٧	ب = ٢

(٣) (٦، ب - ٣) = (٢ - أ، - ١)

٢ - أ = ٦	ب - ٣ = - ١
٢ - ٦ = أ	ب = - ١ + ٣
- ٤ = أ	ب = ٢

(٤) (أ - ٧، ٢٦) = (- ٢، ب^{٣} - ١)

أ - ٧ = - ٢	ب^{٣} - ١ = ٢٦
أ = - ٢ + ٧	ب^{٣} = ٢٦ + ١
أ = ٥	ب^{٣} = ٢٧
	ب^{٣} = ٣^{٣}
	ب = ٣

(٥) (س^{٥}، ص + ١) = (٣٢، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

س^{٥} = ٣٢	ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$
س^{٥} = ٢^{٥}	ص + ١ = ٣
أ = ٢	ص = ٣ - ١
	ص = ٢

(٦) إذا كان
(س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣)
فإن $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ = ...

س - ١ = ٨	ص + ٣ = ١١
س = ٨ + ١	ص = ١١ - ٣
س = ٩	ص = ٨

$\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ = $\sqrt{٩ + ٢ \times ٨}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

حاصل الضرب الديكارتى

الحاصل الديكارتى س × ص هو مجموعة من الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصرمن عناصر المجموعة الأولى س و مسقطها الثانى عنصرمن عناصر المجموعة الثانية ص

س × ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

ملاحظات هامة

(١) س × ص ≠ ص × س

(٢) ن (س) يسمى عدد عناصر س

(٣) ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)

(٤) ن (س × ص) = ن (ص × س)

(٥) ن (س ^{٢}) = ن (س) × ن (س)

(٦) ن (∅) = صفر

(٧) س × ∅ = ∅

---

(١) إذا كانت س = {٢، ٣}، ص = {٤، ٥، ٦}

أوجد (أ) س × ص (ب) ص × س
(جـ) س ^{٢} (ى) ص ^{٢}
(هـ) ن (س × ص) (و) ن (ص × س)
(ل) ن (س ^{٢}) (م) ن (ص ^{٢})

(أ) س × ص = {(٢ ، ٤)، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٤)، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) }

(ب) ص × س = {(٤ ، ٢)، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣)، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

(جـ) س ^{٢} = {(٢ ، ٢)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

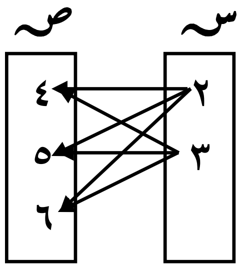
(ى) ص ^{٢} = {(٤ ، ٤)، (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٤)، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٤)، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

(هـ) ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)
= ٢ × ٣ = ٦ أزواج مرتبة

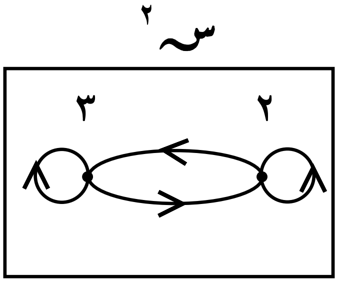
(و) ن (ص × س) = ن (ص) × ن (س)
= ٣ × ٢ = ٦ أزواج مرتبة

(ل) ن (س ^{٢}) = ن (س) × ن (س)
= ٢ × ٢ = ٤ أزواج مرتبة

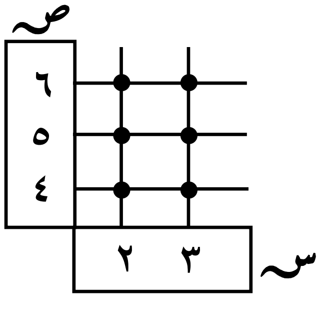
(م) ن (ص ^{٢}) = ن (ص) × ن (ص)
= ٣ × ٣ = ٩ أزواج مرتبة



مخطط سهمى
س × ص



مخطط سهمى
س ^{٢}



مخطط بيانى
س × ص

(٢) إذا كانت س = {٢، ٤}، ص = {٤، ٥، ٦}
، ع = {٤، ٥، ٧}

أوجد (أ) (س ∩ ص) × ع
(ب) (س ∪ ص) × (س ∩ ص)
(جـ) (س − ص) × (ع − ص)

(س ∩ ص) = {٤}
(س ∪ ص) = {٢، ٤، ٥، ٦}
(س − ص) = {٢}
(ع − ص) = {٧}

(أ) (س ∩ ص) × ع
= {٤} × {٤، ٥، ٧}
= {(٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٧)}

(ب) (س ∪ ص) × (س ∩ ص)
= {٢، ٤، ٥، ٦} × {٤}
= {(٢، ٤)، (٤، ٤)، (٥، ٤)، (٦، ٤)}

(جـ) (س − ص) × (ع − ص)
= {٢} × {٧} = {(٢، ٧)}

(٣) **أوجد ما يأتى**

١ إذا كان ن (س × ص) = ١٢، ن (س) = ٣ أوجد ن (ص)

ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)
= ٣ × ن (ص) = ١٢
∴ ن (ص) = ١٢ ÷ ٣ = ٤

---

٢ إذا كان س = {٤ ، ٥}، ن (س × ص) = ٦ أوجد ن (ص)

ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)
= ٢ × ن (ص) = ٦
∴ ن (ص) = ٦ ÷ ٢ = ٣

---

٣ إذا كان س × ص = {(١ ، ٣)، (١ ، ٤)}
فإن ن (س) = ...
س = {١} ∴ ن (س) = ١

---

٤ إذا كان س = {٥}، ص = {٣}
فإن ن (س × ص) = ...

ن (س × ص) = ١ × ١ = ١

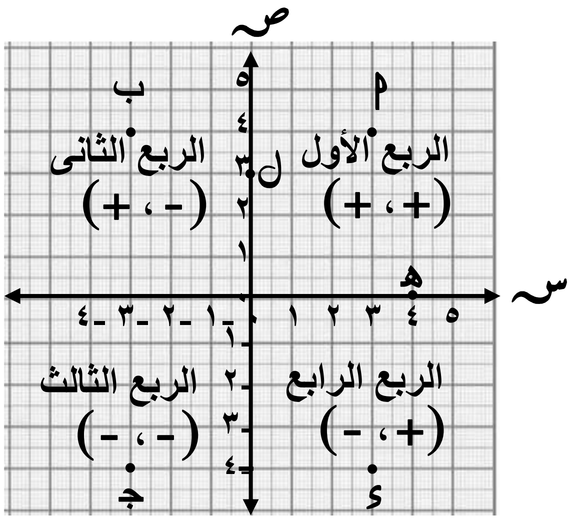
---

٥ إذا كان ن (س^{٢}) = ٩
فإن ن (س) = ...

ن (س) = √٩ = ٣ (الجذر الموجب فقط)

تمثيل حاصل الضرب الديكارتى

ع × ع = {(س ، ص): س ∈ ع، ص ∈ ع }



ملاحظات هامة من الرسم السابق

(١) النقطة م(٣، ٤) (+ ، +)
تقع فى الربع الأول

(٢) النقطةب(-٣، ٤) (- ، +)
تقع فى الربع الثانى

(٣) النقطةجـ(-٣، - ٤) (- ، -)
تقع فى الربع الثالث

(٤) النقطة ء(٣، - ٤) (+ ، -)
تقع فى الربع الرابع

(٥) النقطة التى تقع على محور السينات
يكون قيمة ص = صفر مثال النقطة هـ (٤ ، صفر)

(٦) النقطة التى تقع على محور الصادات
يكون قيمة س = صفر مثال النقطة ل (صفر، ٣)

تدريبـــات

(١) إذا كانت النقطة (٥، ب - ٧)
تقع على محور السينات فإن ب = ...
(٣، ٥ ، ٧ ، ١٢)

∵ النقطة تقع على محور السينات
∴ المسقط الثانى ص = صفر
ب - ٧ = ٠
ب = ٧

(٢) إذا كانت النقطة (م + ٣، ٨)
تقع على محور الصادات فإن م = ...
(-٣، ٥ ، -٤ ، - ٩)

∵ النقطة تقع على محور الصادات
∴ المسقط الأول س = صفر
م + ٣ = ٠
م = - ٣

(٣) إذا كانت النقطة (س - ٤ ، ٢ - س)
تقع فى الربع الثالث فإن س = ...
(٢، ٣ ، ٤ ، ٦)

∵ النقطة تقع فى الربع الثالث (- ، -)

∴ يجب أن يكون قيمة كل من الإحداثى الأول
و الإحداثى الثانى للنقطة عدد سالب

و بالتعويض عن قيمة س من الإختيارات
نجد أن س = ٣

العلاقات

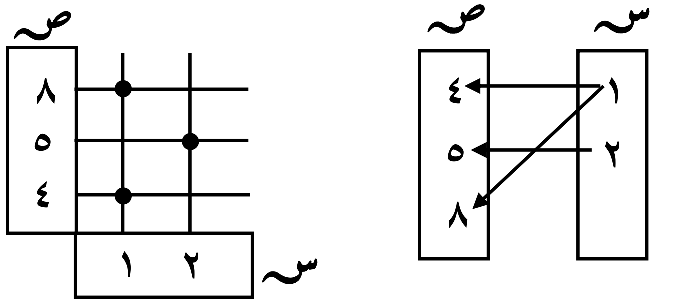
إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة ع من س إلى ص هى إرتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

أى أن ع مجموعة من الأزواج المرتبة المسقط الأول منها ∋ س و المسقط الثانى منها ∋ ص

ويكون ع ⊂ س × ص

(١) إذا كانت س = { ١ ، ٢ }، ص = { ٤ ، ٥ ، ٨ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أ + ب = عدد فردى لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

بيان ع = {(١ ، ٤)، (١ ، ٨) ، (٢ ، ٥) }



العدد الأولى هو العدد الذى له عاملان مختلفان فقط
٥ = ١ × ٥ ، ٧ = ١ × ٧
<u>الأعداد الأولية</u>
٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤١ ، ٤٣ ، ٤٧ ، ٥٣ ، ....

(٢) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ }
، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أ + ب = عدد أولياً لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

بيان ع =
{(٢ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٢)، (٣ ، ٤)، (٣ ، ٨)}

---

(٣) إذا كانت س = { - ١ ، ١ ، ٢ }
، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى ب = ٢ أ + ٤ لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

بيان ع = {(- ١ ، ٢)، (١ ، ٦)، (٢ ، ٨)}

---

(٤) إذا كانت س = { - ٢ ، - ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

و كانت ع علاقة على س أ ع ب تعنى العدد أ معكوس جمعى للعدد ب لكل أ ∋ س ، ب ∋ س أكتب بيان ع

بيان ع
= {(- ٢ ، ٢)، (- ١ ، ١)، (٠ ، ٠) ، (١ ، - ١) ، (٢ ، - ٢)}

(٥) إذا كانت س = { ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ }

، ص = { ٠ ، ١ ، -١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$ }

و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث م ع ب تعنى العدد م معكوس ضربى للعدد ب لكل م ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع

بيان ع = {(٢ ، $\frac{١}{٢}$)، (١ ، ١)، (-١ ، -١) ، (-٢ ، $\frac{-١}{٢}$)}

---

(٦) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ }

و كانت ع علاقة على س م ع ب
تعنى العدد م مضاعف للعدد ب
(العدد م يقبل القسمة على العدد ب)
لكل م ∋ س ، ب ∋ س أكتب بيان ع

بيان ع = {(١ ، ١)، (٢ ، ١)، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢)، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ١)، (٦ ، ٢)، (١٠ ، ١) ، (١٠ ، ٢) }

---

(٧) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

، ص = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥ }

و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث م ع ب
تعنى تعنى العدد م يقسم العدد ب
(العدد م عامل من عوامل العدد ب)
(العدد ب يقبل القسمة على العدد م)
لكل م ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

بيان ع = {(٢ ، ٦)، (٢ ، ٨)، (٢ ، ١٠)، (٣ ، ٦)، (٣ ، ١٥) ، (٤ ، ٨)}

(٨) إذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

، ص = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٦ ، ٩ }

و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث م ع ب تعنى تعنى العدد م ^{٢} = ب لكل م ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

بيان ع = {(-١ ، ١)، (٠ ، ٠)، (١ ، ١)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ٩) }

---

(٩) إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ }

، ص = { ١ ، ٣ ، ٨ }

و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث م ع ب تعنى تعنى العدد م ^{٣} = ب لكل م ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

بيان ع = {(١ ، ١)، (٢ ، ٨)}

---

(١٠) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث م ع ب تعنى تعنى العدد ٢م = ب لكل م ∋ س ، ب ∋ ص
أكتب بيان ع

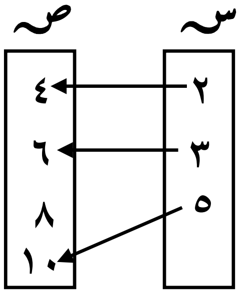
بيان ع = {(٢ ، ٤)، (٣ ، ٦)، (٥ ، ١٠) }

الدالة (التطبيق)

يقال لعلاقة من س إلى ص أنها دالة إذا كان كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

(١) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }
، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث ا ع ب تعنى تعنى العدد ٢ ا = ب لكل ا ∈ س ، ب ∈ ص
أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و بين ما إذا كانت ع دالة أم لا مع ذكر السبب

بيان ع = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) }



العلاقة دالة
لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة
أو لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط لأحد عناصر ص

<u>ملاحظات هامة</u>
(١) قاعدة الدالة د هى د(س) = ٢ س
(٢) مجال الدالة د هو المجموعة س
(٣) المجال المقابل للدالة د هو المجموعة ص
(٤) مدى الدالة د هو مجموعة صور عناصر المجموعة س بواسطة الدالة د
المدى = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }
(٥) المدى هو العناصر المأخوذة من ص وهى المسقط الثانى فى الأزواج المرتبة
(٦) المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة

(٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ }
، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص
بين أى العلاقات الآتية دالة أم لا مع ذكر السبب

$ع_١$ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٧) }
$ع_٢$ = { (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٧) }
$ع_٣$ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٦) }

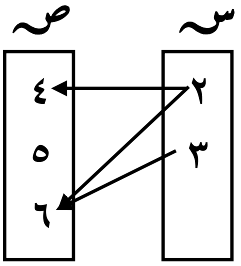
$ع_١$ دالة
لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة

$ع_٢$ ليست دالة
لأن العنصر ١ من عناصر س ظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة

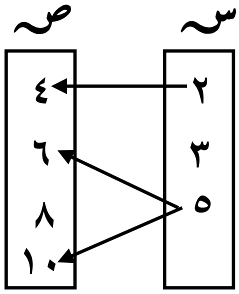
$ع_٣$ ليست دالة
لأن العنصر ٣ من عناصر س لم يظهر كمسقط أول فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة

---

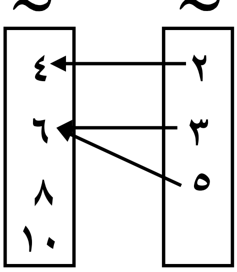
(٣) بين أى المخططات الآتية دالة أم لا



ليست دالة



ليست دالة



دالة

دوال كثيرات الحدود

تكون الدالة كثيرة حدود بالشروط الآتية

(١) المجال و المجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح
(٢) قاعدة الدالة (صورة س) هى حد جبرى أو مقدار جبرى
(٣) تكون قوة المتغير عدداً طبيعياً و ليس عدداً سالباً أو كسراً

درجة الدالة كثيرة الحدود هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة

يتم تحديد ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل الاختصار

يتم تحديد درجة الدالة كثيرة الحدود بعد الاختصار

أمثلة لدوال كثيرات الحدود

(١) د(س) = ٣ س^{٢} + ٢ س + ٥ (دالة تربيعية)
دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

(٢) د(س) = ٥ س − ٣ (دالة خطية)
دالة كثير حدود من الدرجة الأولى

(٣) د(س) = ٧ (دالة ثابتة)
دالة كثير حدود من الدرجة الصفرية

---

(١) أى من الدوال التالية تمثل كثيرة حدود أم لا

(أ) د(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣

(ب) ت(س) = س^{٣} + $\frac{١}{س}$ + ٧

(ج) ر(س) = س^{٢} + $\sqrt{س}$ + ٨

(ء) ن(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ − ٢)

(أ) دالة كثيرة حدود

(ب) ليست كثيرة حدود لأن الحد الثانى س$^{-١}$ المتغير مرفوع لأس سالب (غيرطبيعى)

(ج) ليست كثيرة حدود لأن الحد الثانى س$^{\frac{١}{٢}}$ المتغير مرفوع لأس كسرى(غيرطبيعى)

(ء) ليست كثيرة حدود لأن الحد الثانى س$^{-١}$ المتغير مرفوع لأس سالب (غيرطبيعى)

---

(٢) عين درجة كل من الدوال الآتية

(أ) د(س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٣)
د(س) = س^{٢} − س^{٢} + ٣
د(س) = ٣ **الدالة من الدرجة الصفرية**

(ب) د(س) = س(س − ٢ س^{٢})
د(س) = س^{٢} − ٢س^{٣}
الدالة من الدرجة الثالثة

(ج) د(س) = س^{٢} (س − ٣)^{٢}
د(س) = س^{٢}(س^{٢} − ٦ س + ٩)
د(س) = س^{٤} − ٦ س^{٣} + ٩ س
الدالة من الدرجة الرابعة

(٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} - ٣ س + ١
أوجد د(٣) ، د(٢) ، د(- ١)

د(٣) = (٣)^{٢} - ٣ ×(٣) + ١ = ١
د(٢) = (٢)^{٢} - ٣ ×(٢) + ١ = - ١
د(- ١) = (- ١)^{٢} - ٣ ×(- ١) + ١ = ٥

---

(٤) إذا كانت د(س) = س^{٢} - ٣ س
، ر(س) = س - ٣

(أ) أوجد د($\sqrt{٢}$) + ٣ ر($\sqrt{٢}$)
(ب) اثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

د(س) = س^{٢} - ٣ س
د($\sqrt{٢}$) = ($\sqrt{٢}$)^{٢} - ٣ ($\sqrt{٢}$)
= ٢ - ٣$\sqrt{٢}$ ①

ر(س) = س - ٣
ر($\sqrt{٢}$) = ($\sqrt{٢}$) - ٣
٣ ر($\sqrt{٢}$) = ٣ ($\sqrt{٢}$ - ٣)
= ٣$\sqrt{٢}$ - ٩ ②

من ١ ، ٢
د($\sqrt{٢}$) + ٣ ر($\sqrt{٢}$)
= ٢ - ٣$\sqrt{٢}$ + ٣$\sqrt{٢}$ - ٩ = - ٧ مطلوب أ

د(س) = س^{٢} - ٣ س
د(٣) = (٣)^{٢} - ٣ (٣) = ٩ - ٩ = ٠ ③

ر(س) = س - ٣
ر(٣) = (٣) – ٣ = ٠ ④
من ٣ ، ٤
د(٣) = ر(٣) = صفر مطلوب ب

الدالة الثابتة

الدالة الثابتة دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

الصورة العامة للدالة الثابتة
د(س) = أ حيث أ ≠ صفر
يمثلها خط مستقيم يوازى محور السينات و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، أ)

(١) إذا كانت د(س) = ٩ أكمل ما يأتى

(أ) د(س^{٢}) = ٩

(ب) د(س + ٢) = ٩

(جـ) د(- س) = ٩

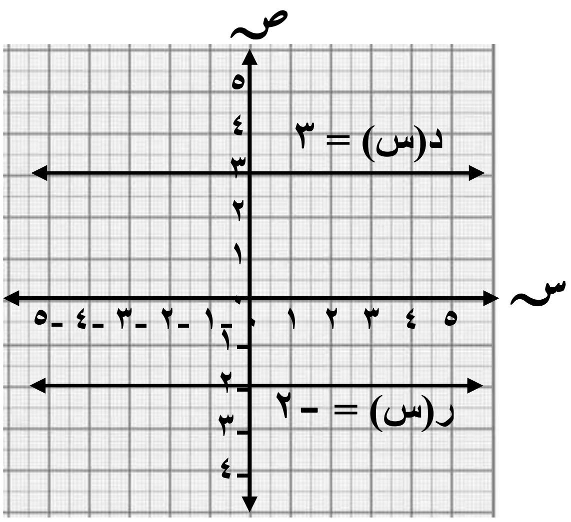
(ى) -د(س) = -٩

(هـ) د(٥) + د(- ٣) = ٩ + ٩ = ١٨

(و) ٣د(٢) = ٣ × ٩ = ٢٧

---

(٢) مثل بيانياً د(س) = ٣ ، ر(س) = - ٢



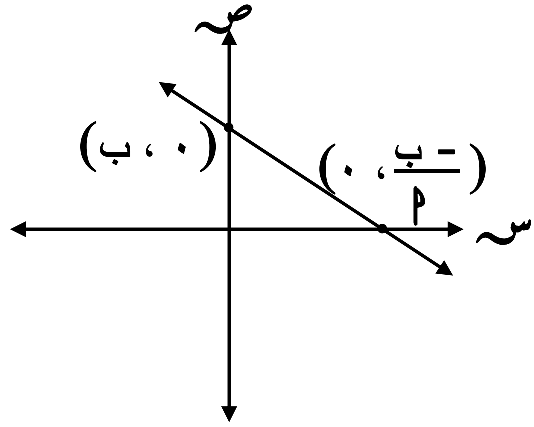
الدالة الخطية

الدالة الخطية دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

<u>الصورة العامة للدالة الخطية</u>

د(س) = م س + ب حيث م ≠ صفر

يمثلها خط مستقيم يقطع محور الصادات
عند س = ٠ فى النقطة (٠ ، ص)
و يقطع محور السينات عند ص = ٠
فى (س ، ٠)



إذا كان الحد المطلق = صفر فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل و(٠ ، ٠)

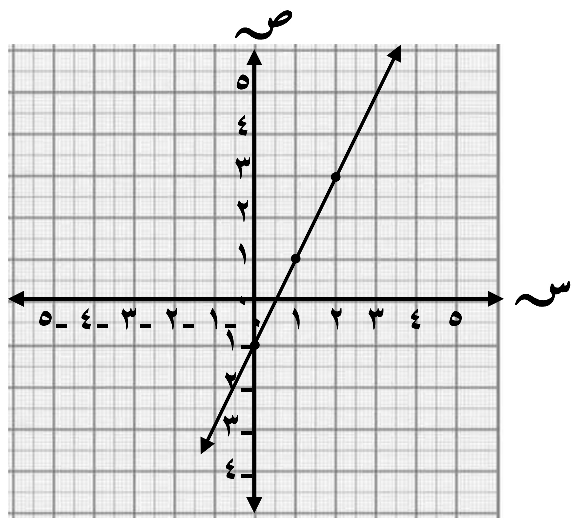
---

(١) مثل بيانياً د(س) = ٢ س − ١ و عين نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

بفرض س = ٠
د(٠) = ٢ ×(٠) − ١= − ١ (٠ ، − ١)

بفرض س = ١
د(١) = ٢ ×(١) − ١= ١ (١ ، ١)

بفرض س = ٢
د(١) = ٢ ×(٢) − ١= ٣ (٢ ، ٣)



المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة(٠،−١)
يقطع محور السينات فى النقطة(١/٢ ، ٠)

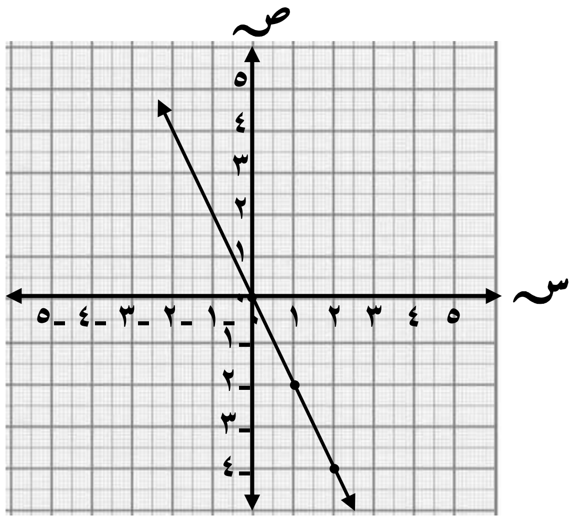
---

(٢) مثل بيانياً د(س) = − ٢ س

بفرض س = ٠
د(٠) = − ٢ ×(٠) = ٠ (٠ ، ٠)

بفرض س = ١
د(١) = − ٢ ×(١) = − ٢ (١ ، − ٢)

بفرض س = ٢
د(٢) = − ٢ ×(٢) = − ٤ (٢ ، − ٤)



(٣) أكمل ما يأتى

(١) إذا كانت النقطة (م ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د (س) = ٤ س – ٥ فإن م = ...

∵ النقطة (م ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة

∴ د (م) = ٣

د(م) = ٤ × (م) – ٥ = ٣

∴ ٤م = ٣ + ٥

∴ ٤م = ٨ ÷ ٤

∴ م = ٢

---

(٢) إذا كانت د (س) = ٣ س + ب ، د (٤) = ١٣ فإن ب = ...

∵ د (٤) = ١٣

∴ د (٤) = ٣ × (٤) + ب = ١٣

∴ ١٢ + ب = ١٣

∴ ب = ١٣ – ١٢ = ١

∴ ب = ١

---

(٣) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = س + ٧ يمثلها خط المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة..........

∵ الخط المستقيم يقطع محور السينات

عندما ص = صفر

∴ س + ٧ = صفر

∴ س = –٧

∴ النقطة (–٧ ، ٠)

ملحوظة الزوج المرتب (س ، ص) يمكن أن يكتب على الصورة (س ، د (س))

أى أن ص = د (س)

(٤) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢س – ١ يمثلها خط المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة..........

∵ الخط المستقيم يقطع محور الصادات

عندما س = صفر

∴ ص = ٢ × (٠) – ١ = – ١

∴ ص = – ١

∴ النقطة (٠ ، – ١)

---

(٥) إذا كانت س~ = {١ ، ٣ ، ٥} ، د (س) = ٢ س + ١ فإن مدى الدالة د = ...

د(١) = ٢ × (١) + ١ = ٣ (١ ، ٣)

د(٣) = ٢ × (٣) + ١ = ٧ (٣ ، ٧)

د(٥) = ٢ × (٥) + ١ = ١١ (٥ ، ١١)

∴ مدى الدالة = {٣ ، ٧ ، ١١}

---

(٦) إذا كانت د (س) = ٤ س – ٩ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (م ، م) فإن م = ...

∵ (م ، م) ∋ بيان الدالة

∴ د(م) = م

بالتعويض فى قاعدة الدالة د (س) = ٤ س – ٩

د(م) = ٤ × (م) – ٩ = م

∴ ٤ × (م) – م = ٩

∴ ٣ م = ٩ ÷ ٣

∴ م = ٣

الدالة التربيعية

الدالة التربيعية دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية يمثلها منحنى

<u>الصورة العامة للدالة الخطية</u>

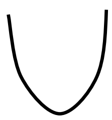
د(س) = م س^{٢} + ب س + جـ   حيث م ≠ صفر

<u>ملاحظات هامة</u>

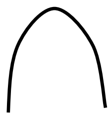
(١) رأس المنحنى ($\frac{-\text{ب}}{\text{٢م}}$ ، د($\frac{-\text{ب}}{\text{٢م}}$))

(٢) محور التماثل يمر برأس المنحنى و يوازى محور الصادات

(٣) إذا كان م > صفر (عدد موجب)
تكون للدالة قيمة صغرى (فتحة المنحنى لأعلى)
مثال د(س) = ٣ س^{٢} + ٢ س + ٤



(٤) إذا كان م < صفر (عدد سالب)
تكون للدالة قيمة عظمى (فتحة المنحنى لأسفل)
مثال د(س) = -٣ س^{٢} + ٢ س + ٤



---

(١) مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم استنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

(م) د(س) = س^{٢} + ٢ س + ١
حيث س ∈ [-٤ ، ٢]

د(-٤) = (-٤)^{٢} + ٢ ×(-٤) + ١ = ٩
(-٤ ، ٩)

د(-٣) = (-٣)^{٢} + ٢ ×(-٣) + ١ = ٤
(-٣ ، ٤)

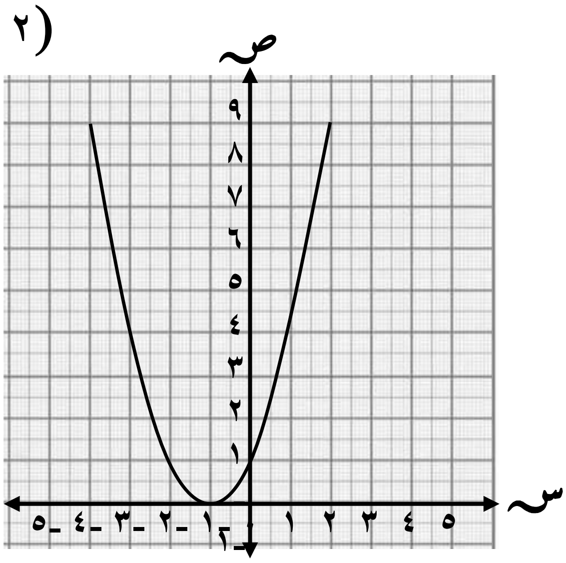
د(-٢) = (-٢)^{٢} + ٢ ×(-٢) + ١ = ١
(-٢ ، ١)

د(-١) = (-١)^{٢} + ٢ ×(-١) + ١ = ٠
(-١ ، ٠)

د(٠) = (٠)^{٢} + ٢ ×(٠) + ١ = ١
(٠ ، ١)

د(١) = (١)^{٢} + ٢ ×(١) + ١ = ٤
(١ ، ٤)

د(٢) = (٢)^{٢} + ٢ ×(٢) + ١ = ٩
(٢ ، ٩)



رأس المنحنى (-١ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = -١

القيمة الصغرى عند ص = صفر

(ب) د(س) = س^{٢} - ٢

حيث س ∋ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = (-٣)^{٢} - ٢ = ٧ (-٣ ، ٧)

د(-٢) = (-٢)^{٢} - ٢ = ٢ (-٢ ، ٢)

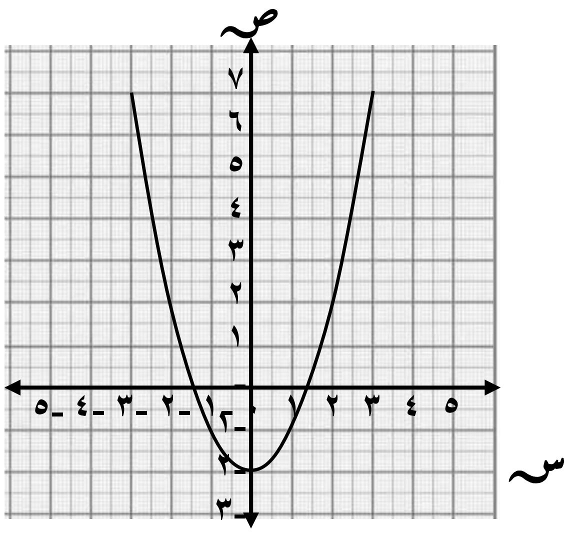
د(-١) = (-١)^{٢} - ٢ = -١ (-١ ، -١)

د(٠) = (٠)^{٢} - ٢ = -٢ (٠ ، -٢)

د(١) = (١)^{٢} - ٢ = -١ (١ ، -١)

د(٢) = (٢)^{٢} - ٢ = ٢ (٢ ، ٢)

د(٣) = (٣)^{٢} - ٢ = ٧ (٣ ، ٧)



رأس المنحنى (٠ ، -٢)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى عند ص = -٢

(جـ) د(س) = ٢ - س^{٢}

حيث س ∋ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = ٢ - (-٣)^{٢} = -٧ (-٣ ، -٧)

د(-٢) = ٢ - (-٢)^{٢} = -٢ (-٢ ، -٢)

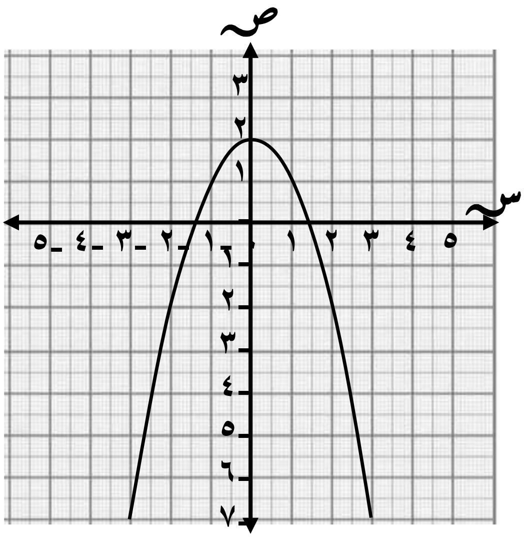
د(-١) = ٢ - (-١)^{٢} = ١ (-١ ، ١)

د(٠) = ٢ - (٠)^{٢} = ٢ (٠ ، ٢)

د(١) = ٢ - (١)^{٢} = ١ (١ ، ١)

د(٢) = ٢ - (٢)^{٢} = -٢ (٢ ، -٢)

د(٣) = ٢ - (٣)^{٢} = -٧ (٣ ، -٧)



رأس المنحنى (٠ ، ٢)

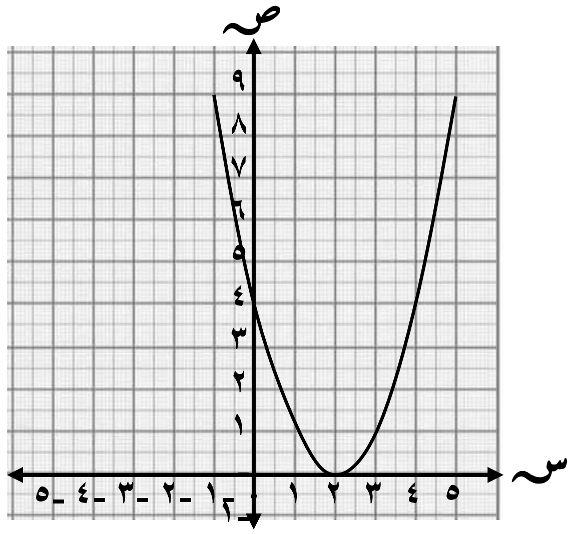
معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٢

(ى) د(س) = (س - ٢)^{٢}

حيث س ∈ [-١ ، ٥]

د(-١) = (-١ - ٢)^{٢} = ٩	(-١ ، ٩)
د(٠) = (٠ - ٢)^{٢} = ٤	(٠ ، ٤)
د(١) = (١ - ٢)^{٢} = ١	(١ ، ١)
د(٢) = (٢ - ٢)^{٢} = ٠	(٢ ، ٠)
د(٣) = (٣ - ٢)^{٢} = ١	(٣ ، ١)
د(٤) = (٤ - ٢)^{٢} = ٤	(٤ ، ٤)
د(٥) = (٥ - ٢)^{٢} = ٩	(٥ ، ٩)



رأس المنحنى (٢ ، ٠)

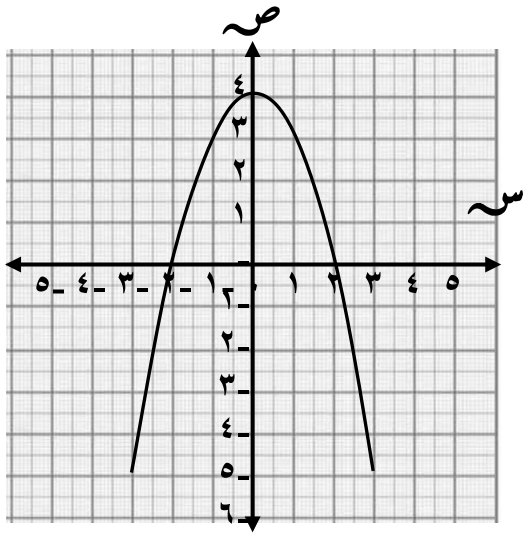
معادلة محور التماثل س = ٢

القيمة الصغرى عند ص = ٠

(هـ) د(س) = ٤ - س^{٢}

حيث س ∈ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = ٤ - (-٣)^{٢} = -٥	(-٣ ، -٥)
د(-٢) = ٤ - (-٢)^{٢} = ٠	(-٢ ، ٠)
د(-١) = ٤ - (-١)^{٢} = ٣	(-١ ، ٣)
د(٠) = ٤ - (٠)^{٢} = ٤	(٠ ، ٤)
د(١) = ٤ - (١)^{٢} = ٣	(١ ، ٣)
د(٢) = ٤ - (٢)^{٢} = ٠	(٢ ، ٠)
د(٣) = ٤ - (٣)^{٢} = -٥	(٣ ، -٥)



رأس المنحنى (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٤

(و) د(س) = س^{٢}

حيث س ∈ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = (-٣)^{٢} = ٩ (-٣ ، ٩)

د(-٢) = (-٢)^{٢} = ٩ (-٢ ، ٤)

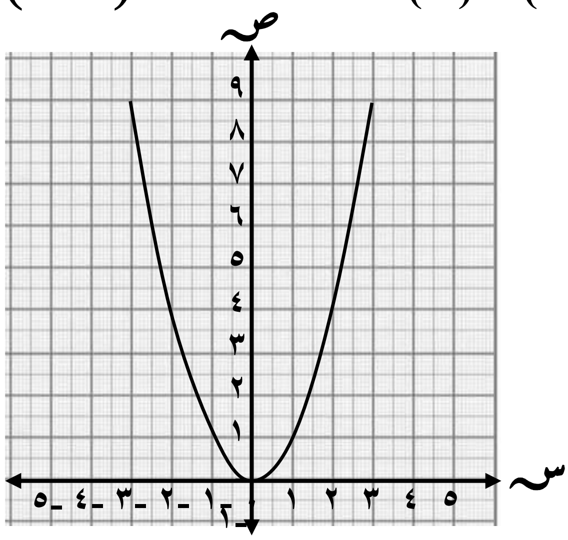
د(-١) = (-١)^{٢} = ١ (-١ ، ١)

د(٠) = (٠)^{٢} = ٠ (٠ ، ٠)

د(١) = (١)^{٢} = ١ (١ ، ١)

د(٢) = (٢)^{٢} = ٤ (٢ ، ٤)

د(٣) = (٣)^{٢} = ٩ (٣ ، ٩)



رأس المنحنى (٠ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى عند ص = ٠

(ل) د(س) = - س^{٢}

حيث س ∈ [-٣ ، ٣]

د(-٣) = - (-٣)^{٢} =- ٩ (-٣ ، - ٩)

د(-٢) = - (-٢)^{٢} =- ٤ (-٣ ، - ٤)

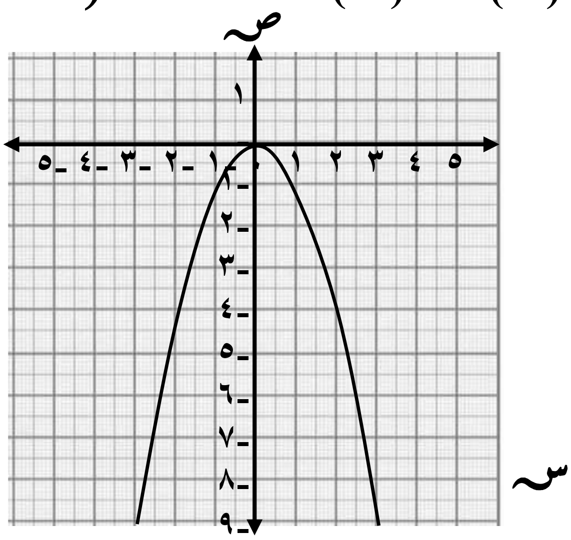
د(-١) = - (-١)^{٢} =- ١ (-١ ، - ١)

د(٠) = - (٠)^{٢} =٠ (٠ ، ٠)

د(١) = - (١)^{٢} =- ١ (١ ، - ١)

د(٢) = - (٢)^{٢} =- ٤ (٢ ، - ٤)

د(٣) = - (٣)^{٢} =- ٩ (٣ ، - ٩)



رأس المنحنى (٠ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٠

النسبة

إذا كان م، ب عددين حقيقين فإن النسبة بين م ، ب

تكتب على الصورة م : ب أو على الصورة $\frac{\text{م}}{\text{ب}}$

و يسمى م الحد الأول للنسبة أومقدم النسبة و يسمى ب الحد الثانى للنسبة أو تالى النسبة

---

(١) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

نفرض العدد = س

$$\frac{\text{٧ + س}}{\text{١١ + س}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

٢١ + ٣س = ٢٢ + ٢س

٣س - ٢س = ٢٢ - ٢١

س = ١

العدد = ١

---

(٢) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ : ٤٦ و طرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢

نفرض العدد = س ، مربعه = $\text{س}^{\text{٢}}$

$$\frac{\text{٢٩ + س}^{\text{٢}}}{\text{٤٦ - س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$

$\text{٥٨ + ٢س}^{\text{٢}} = \text{١٣٨ - ٣س}^{\text{٢}}$

$\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٣س}^{\text{٢}} = \text{١٣٨ - ٥٨}$

$\text{٥س}^{\text{٢}} = \text{٨٠}$ (÷٥)

$\text{س}^{\text{٢}} = \text{١٦}$

$\text{س} = \pm\sqrt{\text{١٦}} = \pm\text{٤}$

العدد = ٤

(٣) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣

أوجد العددين

نفرض العددين ٣س ، ٧س

$$\frac{\text{٣س - ٥}}{\text{٧س - ٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

٩س - ١٥ = ٧س - ٥

٩س - ٧س = - ٥ + ١٥

٢س = ١٠ (÷٢)

س = ٥

العدد الأول = ٣س = ٣ × ٥ = ١٥

العدد الثانى = ٧س = ٧ × ٥ = ٣٥

---

(٤) عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ ، إذا أضيف للعدد الأول ٧ و طرح من العدد الثانى ١٢ أصبحت النسبة بينهما ٥ : ٣

أوجد العددين

نفرض العددين ٢س ، ٣س

$$\frac{\text{٢س + ٧}}{\text{٣س - ١٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$$

١٥س - ٦٠ = ٦س + ٢١

١٥س - ٦س = ٢١ + ٦٠

٩س = ٨١ (÷٩)

س = ٩

العدد الأول = ٢س = ٢ × ٩ = ١٨

العدد الثانى = ٣س = ٣ × ٩ = ٢٧

التناسب

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ **فإن أ ،ب ، جـ، ء كميات متناسبة**

و العكس إذا كان أ ،ب ، جـ، ء كميات متناسبة

فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$

أ يسمى الأول المتناسب ،
ب يسمى الثانى المتناسب ،
جـ يسمى الثالث المتناسب ، ء يسمى الرابع المتناسب

خواص التناسب

أولاً إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ **فإن**

(١) $\text{أ} = \text{جـ م} \quad ، \quad \text{ب} = \text{ء م}$

(٢) $\text{أ ء} = \text{ب جـ}$
حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

(٣) $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}=\frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

ثانياً إذا كان $\text{أ ء} = \text{ب جـ}$ **فإن**

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ **أو** $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}=\frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

ثالثاً إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}=\frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ = م١ ، م٢ ، م٣

فإن $\frac{\text{أ}م_1+\text{جـ}م_2+\text{هـ}م_3}{\text{ب}م_1+\text{ء}م_2+\text{و}م_3}$ **= إحدى النسب**

---

(١) أوجد الرابع المتناسب للأعداد
٤ ، ١٢ ، ١٦

٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

$\frac{٤}{١٢}=\frac{١٦}{\text{س}}$ $\quad$ $\text{س}=\frac{١٦\times١٢}{٤}=٤٨$

---

(٢) أوجد الثانى المتناسب للأعداد
٢ ، ٤ ، ٦

٢، س ، ٤ ، ٦

$\frac{٢}{\text{س}}=\frac{٤}{٦}$ $\quad$ $\text{س}=\frac{٢\times٦}{٤}=٣$

---

(٣) أوجد الثالث المتناسب للأعداد
٨ ، ٦ ، ١٢

٨ ، ٦، س ، ١٢

$\frac{٨}{٦}=\frac{\text{س}}{١٢}$ $\quad$ $\text{س}=\frac{١٢\times٨}{٦}=١٦$

---

(٤) أوجد الأول المتناسب للأعداد
٨ ، ٦ ، ١٢

س ، ٨ ، ٦، ١٢

$\frac{\text{س}}{٨}=\frac{٦}{١٢}$ $\quad$ $\text{س}=\frac{٨\times٦}{١٢}=٤$

---

(٥) أوجد العدد الذى إذا أضيف الى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

نفرض العدد = س

$$\frac{\text{٣}+\text{س}}{\text{٥}+\text{س}} = \frac{\text{٨}+\text{س}}{\text{١٢}+\text{س}}$$

$$(\text{٣}+\text{س})(\text{١٢}+\text{س}) = (\text{٥}+\text{س})(\text{٨}+\text{س})$$

$$\text{٣٦}+\text{٣س}+\text{١٢س}+\text{س}^{\text{٢}} = \text{٤٠}+\text{٥س}+\text{٨س}+\text{س}^{\text{٢}}$$

$$\text{٣٦}+\text{١٥س}+\text{س}^{\text{٢}} = \text{٤٠}+\text{١٣س}+\text{س}^{\text{٢}}$$

$$\text{٣٦}+\text{١٥س}+\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤٠} - \text{١٣س} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{صفر}$$

$$-\text{٤}+\text{٢س} = \text{صفر}$$

$$\text{٢س} = \text{٤} \quad (\div \text{٢})$$

$$\text{س} = \text{٢}$$

العدد = ٢

---

(٦) إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ **أوجد قيمة النسبة**

$$\frac{\text{٣س}+\text{٢ص}}{\text{٦ص}-\text{س}}$$

نفرض س = ٢ م ، ص = ٣ م

$$\frac{\text{٣س}+\text{٢ص}}{\text{٦ص}-\text{س}} = \frac{\text{٣}\times(\text{٢م})+\text{٢}\times(\text{٣م})}{\text{٦}\times(\text{٣م})-(\text{٢م})}$$

$$\frac{\text{٦م}+\text{٦م}}{\text{١٨م}-\text{٢م}} = \frac{\text{١٢م}}{\text{١٦م}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١٦}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

---

(٧) إذا كان ﺃ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{\text{٣ﺃ}-\text{٢جـ}}{\text{٥ﺃ}+\text{٣جـ}} = \frac{\text{٣ب}-\text{٢ء}}{\text{٥ب}+\text{٣ء}}$

∵ ﺃ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

$$\therefore \frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$$

∴ ﺃ = ب م ، جـ = ء م

الطرف الأيمن

$$\frac{\text{٣ﺃ}-\text{٢جـ}}{\text{٥ﺃ}+\text{٣جـ}} = \frac{\text{٣}\times(\text{ب م}) - \text{٢}\times(\text{ء م})}{\text{٥}\times(\text{ب م}) + \text{٣}\times(\text{ء م})}$$

$$= \frac{\text{٣ب م} - \text{٢ء م}}{\text{٥ب م} + \text{٣ء}} = \frac{\text{م}(\text{٣ب}-\text{٢ء})}{\text{م}(\text{٥ب}+\text{٣ء})} = \frac{(\text{٣ب}-\text{٢ء})}{(\text{٥ب}+\text{٣ء})}$$

= الطرف الأيسر

∴ الطرفان متساويان

(٨) إذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

اثبت أن $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^{٢} = \frac{٢ س^{٢} - ٣ ص^{٢}}{٢ ع^{٢} - ٣ ل^{٢}}$

∵ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = م$

∴ س = ص م ، ع = ل م

الطرف الأيمن

$$\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^{٢} = \left(\frac{ص م + ص}{ل م + ل}\right)^{٢}$$

$$= \left(\frac{ص (م + ١)}{ل (م + ١)}\right)^{٢} = \left(\frac{ص}{ل}\right)^{٢} = \frac{ص^{٢}}{ل^{٢}} \quad ①$$

الطرف الأيسر

$$\frac{٢ س^{٢} - ٣ ص^{٢}}{٢ ع^{٢} - ٣ ل^{٢}} = \frac{٢ (ص م)^{٢} - ٣ (ل م)^{٢}}{٢ (ل م)^{٢} - ٣ ل^{٢}}$$

$$= \frac{٢ ص^{٢} م^{٢} - ٣ ص^{٢}}{٢ ل^{٢} م^{٢} - ٣ ل^{٢}} = \frac{ص^{٢} (٢ م^{٢} - ٣)}{ل^{٢} (٢ م^{٢} - ٣)}$$

$$= \frac{ص^{٢}}{ل^{٢}} \quad ②$$

من ١ ، ٢

∴ $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^{٢} = \frac{٢ س^{٢} - ٣ ص^{٢}}{٢ ع^{٢} - ٣ ل^{٢}}$

(٩) إذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

اثبت أن $\sqrt[٣]{\frac{٥ س^{٣} - ٣ ع^{٣}}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}} = \frac{س + ع}{ص + ل}$

∵ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = م$ ∴ س = ص م ، ع = ل م

الطرف الأيمن

$$\sqrt[٣]{\frac{٥ س^{٣} - ٣ ع^{٣}}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{٥ (ص م)^{٣} - ٣ (ل م)^{٣}}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}}$$

$$= \sqrt[٣]{\frac{٥ ص^{٣} م^{٣} - ٣ ل^{٣} م^{٣}}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}}$$

$$= \sqrt[٣]{\frac{م^{٣} (٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣})}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}} = \sqrt[٣]{م^{٣}} = م \quad ①$$

الطرف الأيسر

$$\frac{س + ع}{ص + ل} = \frac{(ص م) + (ل م)}{ص + ل}$$

$$= \frac{م (ص + ل)}{ص + ل} = م \quad ②$$

من ١ ، ٢

∴ $\sqrt[٣]{\frac{٥ س^{٣} - ٣ ع^{٣}}{٥ ص^{٣} - ٣ ل^{٣}}} = \frac{س + ع}{ص + ل}$

(١٠) إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$

اثبت أن $\frac{\text{٢ص − ع}}{\text{٣س − ٢ص + ع}} = \frac{١}{٢}$

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥} = \text{م}$

س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م

$\frac{\text{٢ص − ع}}{\text{٣س − ٢ص + ع}}$

$= \frac{\text{٢×(٤ م) − (٥ م)}}{\text{٣×(٣ م) − ٢×(٤ م) + (٥ م)}}$

$= \frac{\text{٨ م − ٥ م}}{\text{٩ م − ٨ م + ٥ م}}$

$= \frac{\text{٣ م}}{\text{٦ م}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

(١١) إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$

اثبت أن $\sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \text{٢س + ص}$

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥} = \text{م}$

س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م

الطرف الأيمن

$\sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٣×(٣م)}^{٢} + \text{٣×(٤م)}^{٢} + \text{(٥م)}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٣×٩م}^{٢} + \text{٣×١٦م}^{٢} + \text{٢٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٢٧ م}^{٢} + \text{٤٨ م}^{٢} + \text{٢٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{١٠٠ م}^{٢}} = \text{١٠م}$ ①

الطرف الأيسر

٢س + ص = ٢ × ٣م + ٤ م = ٦م+٤م = ١٠ م
②

من ١ ، ٢

$\therefore \sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \text{٢س + ص}$

(١٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{٢}$

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن

$\frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب م} \times \text{د م}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب د م}^{٢}}{\text{ب د}} = \text{م}^{٢}$ ①

الطرف الأيسر

$\left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{٢} = \left(\frac{(\text{ب م}) - (\text{د م})}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{م}(\text{ب} - \text{د})}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{٢} = \text{م}^{٢}$ ②

من ١ ، ٢

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^{٢}$

(١٣) إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٦و٢٧ أوجد أ ، ب ، جـ

أ = ٥ م ، ب = ٧ م ، جـ = ٣ م

∵ أ + ب = ٦و٢٧

∴ ٥ م + ٧ م = ٦و٢٧

١٢ م = ٦و٢٧ (÷١٢)

م = ٣و٢

أ = ٥ م = ٥ × ٣و٢ = ٥و١١

ب = ٧ م = ٧ × ٣و٢ = ١و١٦

جـ = ٣ م = ٣ × ٣و٢ = ٩و٦

---

(١٤) إذا كان ٤س^{٢} - ١٢س ص + ٩ ص^{٢} = ٠

فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

٤س^{٢} - ١٢س ص + ٩ ص^{٢} = ٠

(٢س - ٣ص) (٢س - ٣ص) = ٠

٢س - ٣ص = ٠

٢س = ٣ص

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$

(١٥) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء} - \text{جـ}}$

اثبت أن أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء} - \text{جـ}}$$

$$\text{أء} - \text{أجـ} = \text{بجـ} - \text{أجـ}$$

$$\text{أء} - \text{أجـ} - \text{بجـ} + \text{أجـ} = ٠$$

$$\text{أء} - \text{بجـ} = ٠$$

$$\text{أء} = \text{بجـ}$$

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ ∴ أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

---

(١٦) إذا كان $\frac{٩}{\text{أ}^٢} = \frac{٤}{\text{ب}^٢}$

أوجد $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

$$\frac{٩}{\text{أ}^٢} = \frac{٤}{\text{ب}^٢}$$

$$٤\text{أ}^٢ = ٩\text{ب}^٢$$

$\frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}^٢} = \frac{٩}{٤}$ بإيجاد الجذر التربيعى للطرفين

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \pm \frac{٣}{٢}$$

التناسب - الخاصية الثالثة

أى نسبة لا تتغير إذا ضرب كل من حديها فى نفس العدد

تمهيد إذا كان $\frac{٤}{٨} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

أولاً بجمع مقدمات و توالى النسبة الأولى و الثانية

$\frac{٤+٣}{٨+٦} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢} =$ إحدى النسب

ثانياً بضرب حدى النسبة الأولى × ٢

، وضرب حدى النسبة الثانية × ٥ و الجمع

$\frac{٤\times٢+٣\times٥}{٨\times٢+٦\times٥} = \frac{٨+١٥}{١٦+٣٠} = \frac{٢٣}{٤٦} = \frac{١}{٢} =$ إحدى النسب

ثالثاً بجمع مقدمات و توالى النسبة الأولى و الثانية و الثالثة

$\frac{٤+٣+١}{٨+٦+٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢} =$ إحدى النسب

رابعاً بضرب حدى النسبة الثالثة × - ١ ، و جمع النسبة الأولى و الثانية و الثالثة

$\frac{٤+٣-١}{٨+٦-٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢} =$ إحدى النسب

(١) إذا كان $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{٤س - ٢ص}{ع}$

فإن ع = ...

بضرب النسبة الأولى × ٤ الثانية × -٢ و الجمع

$$\frac{٤س-٢ص}{٤×٢-٢×٣} = \frac{٤س-٢ص}{٨-٦} = \frac{٤س-٢ص}{٢}$$

∴ ع = ٢

---

(٢) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{ء}$

فإن $\frac{... + ٣ج}{٥ب + ...} = \frac{أ}{ب}$

بضرب النسبة الأولى ×٥ و الثانية ×٣ و الجمع

$$\frac{٥أ + ٣ج}{٥ب + ٣ء}$$

---

(٣) إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ج}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥ج}{٣س}$

أوجد قيمة س

بضرب النسبة الأولى ×٢ و الثانية × -١ و الثالثة ×٥ و الجمع

$$\frac{٢أ-ب+٥ج}{٢×٢ - ٣ + ٥×٤} = \frac{٢أ-ب+٥ج}{٢١}$$

∴ ٣س = ٢١ (÷٣)

∴ س = ٧

(٤) إذا كان $\frac{س}{٢أ+ب} = \frac{ص}{٢ب-ج} = \frac{ع}{٢ج-أ}$

اثبت أن

$$\frac{٢س+ص}{٤أ+٤ب-ج} = \frac{٢س+٢ص+ع}{٣أ+٦ب}$$

بضرب النسبة الأولى ×٢ و الجمع مع الثانية

$$\frac{٢س+ص}{٤أ+٢ب+٢ب-ج}$$

$= \frac{٢س+ص}{٤أ+٤ب-ج} =$ إحدى النسب ①

بضرب النسبة الأولى ×٢ والثانية ×٢ و الجمع مع الثالثة

$$\frac{٢س+٢ص+ع}{٤أ+٢ب+٤ب-٢ج+٢ج-أ}$$

$= \frac{٢س+٢ص+ع}{٣أ+٦ب} =$ إحدى النسب ②

من ١ ، ٢

∴ $\frac{٢س+ص}{٤أ+٤ب-ج} = \frac{٢س+٢ص+ع}{٣أ+٦ب}$

(٥) إذا كان $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٣} = \frac{\text{ب}+\text{جـ}}{٦} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}}{٥}$

اثبت أن $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = ٧$

بجمع النسبة الأولى و الثانية و الثالثة

$= \frac{٢\text{أ}+٢\text{ب}+٢\text{جـ}}{١٤} = \frac{٢(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})}{١٤}$

$= \frac{(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})}{٧}$ = إحدى النسب ①

بضرب النسبة الثانية × - ١
و الجمع مع الأولى و الثالثة

$\frac{-\text{ب}-\text{جـ}+\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{أ}}{-٦+٣+٥}$

$= \frac{٢\text{أ}}{٢} = \frac{\text{أ}}{١}$ = إحدى النسب ②

من ١ ، ٢

∴ $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{٧} = \frac{\text{أ}}{١}$

∴ $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٧}{١}$

(٦) إذا كان $\frac{\text{ص}}{\text{س}-\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}}$

اثبت أن كلاً من هذه النسب = ٢ (س+ص≠ صفر)
ثم أوجد س : ص : ع

بجمع النسبة الأولى والثانية و الثالثة

$\frac{\text{ص}+\text{س}+\text{س}+\text{ص}}{\text{س}-\text{ع}+\text{ص}+\text{ع}} = \frac{٢\text{س}+٢\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}}$

$= \frac{٢(\text{س}+\text{ص})}{\text{س}+\text{ص}} = ٢$ = إحدى النسب

مطلوب ١

∵ $\boxed{\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}}$ ∴ س = ٢ ص

بالتعويض فى $\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}}$

∴ $\frac{٢\text{ص}+\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٣\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٢}{١}$

∴ ٣ص = ٢ع ∴ $\boxed{\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٢}{٣}}$

س	ص	ع
٢	١	—
—	٢	٣
٤	٢	٣

∴ س : ص : ع = ٤ : ٢ : ٣

التناسب المتسلسل

يقال للكميات ٲ ،ب ، جـ أنها فى تناسب متسلسل

إذا كان $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

و يسمى ٲ الأول المتناسب ،ب الوسط المتناسب ، جـ الثالث المتناسب

$ب^{٢} = ٲ جـ$ أو $ب = \pm \sqrt{ٲ جـ}$

---

(١) إذا كان ٣ ، ٦ ، س
كميات متناسبة (فى تناسب متسلسل) أوجد س

$\frac{٣}{٦} = \frac{٦}{س}$ $س = \frac{٦ \times ٦}{٣} = ١٢$

---

(٢) إذا كان س، ٨ ، ١٢
كميات متناسبة (فى تناسب متسلسل) أوجد س

$\frac{س}{٨} = \frac{٨}{٣٢}$ $س = \frac{٨ \times ٨}{٣٢} = ٢$

---

(٣) أوجد الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧

$\frac{٣}{س} = \frac{س}{٢٧}$

$س^{٢} = ٣ \times ٢٧ = ٨١$

$ب = \pm \sqrt{٨١} = \pm ٩$

(٤) إذا كان ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$

كميات متناسبة(فى تناسب متسلسل)أوجد $س^{٢}ص$

$\frac{٧}{س} = س \div \frac{١}{ص} = س \times \frac{ص}{١} = \frac{س ص}{١}$

$\frac{٧}{س} = \frac{س ص}{١}$ $س^{٢}ص = ٧$

---

(٥) إذا كان ب وسط متناسب بين ٲ ، جـ
أو (ٲ ،ب ، جـ كميات متناسبة)
أو (ٲ ،ب ، جـ فى تناسب متسلسل)
اثبت أن

$\frac{ٲ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{ٲ}{جـ}$

∵ ب وسط متناسب بين ٲ ، جـ

∴ $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ $ب = جـ م$ ، $ٲ = جـ م^{٢}$

الطرف الأيمن

$\frac{ٲ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{(جـ م^{٢})^{٢} + (جـ م)^{٢}}{(جـ م)^{٢} + جـ^{٢}}$

$= \frac{جـ^{٢} م^{٤} + جـ^{٢} م^{٢}}{جـ^{٢} م^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{جـ^{٢} م^{٢} (م^{٢} + ١)}{جـ^{٢} (م^{٢} + ١)} = م^{٢}$ ①

الطرف الأيسر

$\frac{ٲ}{جـ} = \frac{جـ م^{٢}}{جـ} = م^{٢}$ ②

من ١ ، ٢

∴ $\frac{ٲ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢}} = \frac{ٲ}{جـ}$

(٦) إذا كان أ ،ب ، جـ كميات متناسبة

اثبت أن $\frac{2\text{ج}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2}=\frac{\text{ج}}{\text{أ}}=\frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2}$

∵ أ ،ب ، جـ كميات متناسبة

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{ج}}=\text{م}$ $\therefore \text{ب}=\text{جم}$ ، $\text{أ}=\text{جم}^2$

الطرف الأول

$$\frac{2\text{ج}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2}=\frac{2\text{ج}^2-3(\text{جم})^2}{2(\text{جم})^2-3(\text{جم}^2)^2}$$

$$=\frac{2\text{ج}^2-3\text{ج}^2\text{م}^2}{2\text{ج}^2\text{م}^2-3\text{ج}^2\text{م}^4}$$

$$=\frac{\text{ج}^2(2-3\text{م}^2)}{\text{ج}^2\text{م}^2(2-3\text{م}^2)}=\frac{1}{\text{م}^2} \quad (1)$$

الطرف الثانى

$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}}=\frac{\text{ج}}{\text{جم}^2}=\frac{1}{\text{م}^2} \quad (2)$$

الطرف الثالث

$$\frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2}=\frac{\text{ج}^2}{(\text{جم})^2}=\frac{\text{ج}^2}{\text{ج}^2\text{م}^2}=\frac{1}{\text{م}^2} \quad (3)$$

من ١، ٢، ٣

$$\therefore \frac{2\text{ج}^2-3\text{ب}^2}{2\text{ب}^2-3\text{أ}^2}=\frac{\text{ج}}{\text{أ}}=\frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2}$$

(٧) إذا كان أ ،ب ، جـ كميات متناسبة

اثبت أن $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{ج}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{ج}^{-1}}=\text{ب}^2$

∵ أ ،ب ، جـ كميات متناسبة

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{ج}}=\text{م}$ $\therefore \text{ب}=\text{جم}$ ، $\text{أ}=\text{جم}^2$

الطرف الأيمن

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{ج}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{ج}^{-1}}$$

$$=\frac{\text{جم}^2+\text{جم}+\text{ج}}{(\text{جم}^2)^{-1}+(\text{جم})^{-1}+\text{ج}^{-1}}$$

$$=\frac{\text{جم}^2+\text{جم}+\text{ج}}{\text{ج}^{-1}\text{م}^{-2}+\text{ج}^{-1}\text{م}^{-1}+\text{ج}^{-1}}$$

$$=\frac{\text{ج}(\text{م}^2+\text{م}+1)}{\text{ج}^{-1}\text{م}^{-2}(1+\text{م}+\text{م}^2)}$$

$$=\frac{\text{ج}}{\text{ج}^{-1}\text{م}^{-2}}=\text{ج}\times\text{ج}^1\text{م}^2=\text{ج}^2\text{م}^2 \quad (1)$$

الطرف الأيسر

$$\text{ب}^2=(\text{جم})^2=\text{ج}^2\text{م}^2 \quad (2)$$

من ١، ٢

$$\therefore \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{ج}}{\text{أ}^{-1}+\text{ب}^{-1}+\text{ج}^{-1}}=\text{ب}^2$$

(٨) إذا كان أ ،ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$

∵ أ ،ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\therefore \text{جـ} = \text{د م} \quad , \quad \text{ب} = \text{د م}^{٢} \quad , \quad \text{أ} = \text{د م}^{٣}$

الطرف الأول

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{د م}^{٣}}{\text{د م}^{٢} - \text{د م}^{٣}} = \frac{\text{د م}^{٣}}{\text{د م}^{٢}(١ - \text{م})}$$

$$= \frac{\text{م}}{(١ - \text{م})} \quad ①$$

الطرف الأول

$$\frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}} = \frac{\text{د م}}{\text{د} - \text{د م}} = \frac{\text{د م}}{\text{د}(١ - \text{م})}$$

$$= \frac{\text{م}}{(١ - \text{م})} \quad ②$$

من ١، ٢

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$$

(٩) إذا كان أ ،ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

∵ أ ،ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\therefore \text{جـ} = \text{د م} \quad , \quad \text{ب} = \text{د م}^{٢} \quad , \quad \text{أ} = \text{د م}^{٣}$

الطرف الأيمن

$$\frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}} = \frac{(\text{د م}^{٣})(\text{د م}^{٢}) - (\text{د م})\text{د}}{(\text{د م}^{٢})^{٢} - (\text{د م})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{د}^{٢}\text{م}^{٥} - \text{د}^{٢}\text{م}}{\text{د}^{٢}\text{م}^{٤} - \text{د}^{٢}\text{م}^{٢}} = \frac{\text{د}^{٢}\text{م}(\text{م}^{٤} - ١)}{\text{د}^{٢}\text{م}^{٢}(\text{م}^{٢} - ١)}$$

$$= \frac{(\text{م}^{٢} - ١)(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{م}(\text{م}^{٢} - ١)} = \frac{(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{م}} \quad ①$$

الطرف الأيسر

$$\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د م}^{٣} + \text{د م}}{\text{د م}^{٢}} = \frac{\text{د م}(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{د م}^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{م}} \quad ②$$

من ١، ٢

$$\therefore \frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$$

(١٠) ما العدد الذى إذا أضيف الى الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ تكون فى تناسب متسلسل

نفرض العدد = س

$$\frac{\text{١+س}}{\text{٣+س}} = \frac{\text{٣+س}}{\text{٧+س}}$$

٧ + ٧س + س + س^{٢} = ٩ + ٣س + ٣س + س^{٢}

٧ + ٧س + س + س^{٢} - ٩ - ٣س - ٣س - س^{٢} = ٠

٢س - ٢ = ٠

٢س = ٢ (÷ ٢)

س = ١ العدد = ١

---

(١١) ما العدد الذى إذا طرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ تكون فى تناسب متسلسل

نفرض العدد = س

$$\frac{\text{٣ - س}}{\text{٧ - س}} = \frac{\text{٧ - س}}{\text{١٩ - س}}$$

٤٩ - ٧س - ٧ س + س^{٢} = ٥٧ - ١٩س - ٣س + س^{٢}

٤٩ - ٧س - ٧س + س^{٢} - ٥٧ + ١٩س + ٣س - س^{٢} = ٠

٨س - ٨ = ٠

٨س = ٨ (÷ ٨)

س = ١ العدد = ١

(١٢) إذا كان $\frac{\text{م + ب}}{\text{ب+جـ}} = \frac{\text{م - ب}}{\text{ب - جـ}}$

اثبت أن م ،ب ، جـ فى تناسب متسلسل

$$\frac{\text{م + ب}}{\text{ب+جـ}} = \frac{\text{م - ب}}{\text{ب - جـ}}$$

(م+ب) (ب - جـ) = (م - ب) (ب+جـ)

م ب - م جـ + ب^{٢} - ب جـ = م ب + م جـ - ب^{٢} - ب جـ

م ب - م جـ + ب^{٢} - ب جـ - م ب - م جـ + ب^{٢} + ب جـ = ٠

- ٢م جـ + ٢ب^{٢} = ٠

- ٢م جـ = - ٢ب^{٢} (÷ - ٢)

م جـ = ب^{٢}

م جـ = ب × ب

$\therefore$ $\frac{\text{م}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

$\therefore$ م ،ب ، جـ فى تناسب متسلسل

التغير الطردى و التغير العكسى

التغير الطردى

يقال أن الكمية ص تتغير طردياً بتغير الكمية س إذا تغيرت الكمية س بالزيادة أو النقص تتغير ص بنفس النسبة فى الزيادة أو النقص التى تتغير بها س
يعبر عن ذلك رياضياً ص ∝ س
و تقرأ ص تتغير طردياً بتغير س

ملاحظات هامة

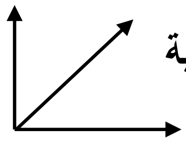
(١) قد تحذف كلمة طردياً
و يقال أن ص تتغير بتغير س (÷ ٢)

(٢) إذا كانت ص ∝ س فإن

ص = م س حيث م ثابت ≠ صفر

، $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$

(٣)علاقة التغير الطردى علاقة خطية
تمثل بمستقيم يمر بنقطة الأصل



الجدول التالى يوضح العلاقة بين محيط مربع (ح) و طول ضلعه (ل)

ل	١	٢	٣	٤	٥
ح	٤	٨	١٢	١٦	٢٠

محيط المربع ح يتغير طردياً مع طول الضلع ل
ح ∝ ل ،
محيط المربع = طول الضلع × ٤
ح = ٤ ل حيث أن العدد ٤ هو ثابت التغير

(١) إذا كانت ص ∝ س
و كانت ص = ٦ عندما س = ٢
أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س =٩

∵ ص ∝ س

∴ ص = م س

بالتعويض عن ص = ٦ ، س = ٢

∴ ٦ = م ×٢

∴ ٦ = ٢ م (÷ ٢)

٣ = م

∵ ص = م س

∴ ص = ٣س مطلوب ١

قيمة ص عندما س = ٩

∵ ص = ٣ س

∴ ص = ٣×٩ = ٢٧ مطلوب ٢

---

(٢) إذا كانت ص ∝ س و كانت ص = ٢٠ عندما س = ٥ أوجد قيمة ص عندما س = ٧

∵ ص ∝ س ∴ $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$

$\frac{٢٠}{\text{ص}_2} = \frac{٥}{٧}$ ص = $\frac{٢٠ \times ٧}{٥}$ = ٢٨

التغير العكسى

الكمية ص تتغير طردياً بتغير الكمية س

يعبر عن ذلك رياضياً ص $\propto \frac{١}{س}$

و تقرأ ص تتغير عكسياً بتغير س

إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ فإن ص $= \frac{م}{س}$

، $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

إذا كانت مساحة مستطيل ثابتة و تساوى ٢٤ سم^٢

و طوله و عرضه س ، ص

الجدول التالى يوضح العلاقة بين الطول و العرض عند ثبات المساحة

س	٢	٣	٤	٦
ص	١٢	٨	٦	٤

نلاحظ أنه بزيادة طول المستطيل ينقص العرض

ص $\propto \frac{١}{س}$

---

(١) إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ و كانت ص = ٣

عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥و١

$\because$ ص $\propto \frac{١}{س}$ $\therefore$ ص $= \frac{م}{س}$

بالتعويض عن ص = ٣ ، س = ٢

$\frac{٣}{١} = \frac{م}{٢}$ $\therefore$ م $= \frac{٢ \times ٣}{١} = ٦$

$\because$ ص $= \frac{م}{س}$ $\therefore$ ص $= \frac{٦}{س}$ مطلوب ١

قيمة ص عندما س = ٥و١

$\because$ ص $= \frac{٦}{س}$ $\therefore$ ص $= \frac{٦}{١و٥} = ٤$ مطلوب٢

(٣) إذا كانت ص $\propto$ س^٢ و كانت ص = ٤٥

عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين ص ، س

ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦

$\because$ ص $\propto$ س^٢

$\therefore$ ص = م س^٢

بالتعويض عن ص = ٤٥ ، س = ٣

$\therefore$ ٤٥ = م × ٣^٢

$\therefore$ ٤٥ = ٩ م (÷ ٩)

م = ٥

$\because$ ص = م س^٢

$\therefore$ ص = ٥ س^٢ مطلوب ١

قيمة ص عندما س = ٦

$\because$ ص = ٥ س^٢

$\therefore$ ص = ٥ × ٦^٢ = ١٨٠ مطلوب ٢

(٢) إذا كانت $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$ و كانت ص = ٨ عنما س = ٣ أوجد قيمة ص عندما س = ٦

$\because \text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}} \quad \therefore \frac{\text{ص}_١}{\text{ص}_٢} = \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١}$

$\therefore \frac{٣}{٦} = \frac{\text{ص}}{٨} \quad \therefore \text{ص} = \frac{٨ \times ٣}{٦} = ٤$

تدريبات على التغير الطردى و التغير العكسى

(١) إذاكان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق و كانت ع = ٥ سم / ث عندما نق = ٣ سم

أوجد ع عندما نق = ٥و٢ سم

$\text{نق}_١ = ٣$ سم ، $\text{نق}_٢ = ٥\text{و}٢$ سم

$\text{ع}_١ = ٥$ سم / ث ، $\text{ع}_٢ = ؟$

$\because \text{ع} \propto \frac{١}{\text{نق}^٢}$

$\therefore \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{(\text{نق}_٢)^٢}{(\text{نق}_١)^٢}$

$\frac{٥}{\text{ع}_٢} = \frac{(٥\text{و}٢)^٢}{(٣)^٢}$

$\therefore \text{ع}_٢ = \frac{٥ \times (٣)^٢}{(٥\text{و}٢)^٢} = ٢\text{و}٧$ سم / ث

(٢) تسير سيارة بسرعة ثابتة حيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كم فى ٦ ساعات
فكم كيلومتراً تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات ؟

بفرض المسافة (ف) و الزمن (ن)

$\text{ف}_١ = ١٥٠ \quad \text{ن}_١ = ٦$

$\text{ف}_٢ = ؟ \quad \text{ن}_٢ = ١٠$

$\text{ف} \propto \text{ن} \qquad \frac{\text{ف}_١}{\text{ف}_٢} = \frac{\text{ن}_١}{\text{ن}_٢}$

$\frac{١٥٠}{\text{ف}} = \frac{٦}{١٠} \qquad \text{ف} = \frac{١٥٠ \times ١٠}{٦} = ٢٥٠$ كم

---

(٣) إذا كانت س تتغير عكسياً بتغير مربع ص و كانت س = ١٠ عندما ص = ٢
اوجد قيمة ص عندما س = ٤٠

$\because \text{س} \propto \frac{١}{\text{ص}^٢} \quad \therefore \frac{\text{س}_١}{\text{س}_٢} = \frac{(\text{ص}_٢)^٢}{(\text{ص}_١)^٢}$

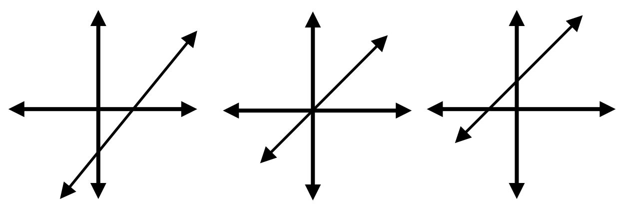
$\frac{١٠}{٤٠} = \frac{(\text{ص}_٢)^٢}{(٢)^٢}$

$(\text{ص}_٢)^٢ = \frac{٤ \times ١٠}{٤٠} = ١$

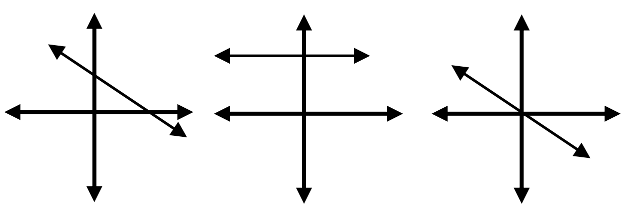
$\text{ص}_٢ = \pm\sqrt{١} = \pm ١$

---

(٤) أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل تغيراً طردياً



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)



شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦)

(٥) صنف التغيرات الآتية إلى طردى أو عكسى

(١) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٩$ (٢) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٢}$

(٣) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤}{\text{ص}}$ (٤) ٣س ص = ٨

(٥) $\frac{\text{س}_١\ \text{ص}_١}{\text{س}_٢\ \text{ص}_٢} = ١$

(٦) $\text{س}^٤\ \text{ص}^٢ - ١٤\ \text{س}^٢\ \text{ص} + ٤٩ = ٠$

(٧) $\text{س}^٢\ \text{ص}^٢ + ٤ = ٤\ \text{س ص}$

(٨) $\text{ص}^٢ - ٦\ \text{س ص} + ٩\ \text{س}^٢ = ٠$

(٩) $\text{أ}^٢\text{ب}^٢ + \frac{١}{٤} = \text{أب}$

(١٠) $\text{ص} - \text{س} = \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{ص}}$

حيث س ≠ ص ≠ صفر

---

(١) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٩$ بالضرب × س

ص = ٩ س ∴ ص ∝ س

---

(٢) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٢}$

٥ ص = ٢ س بالقسمة ÷ ٥

$\text{ص} = \frac{٢}{٥}\ \text{س}$ ∴ ص ∝ س

---

(٣) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤}{\text{ص}}$

س ص = ١٢ بالقسمة ÷ س

$\text{ص} = \frac{١٢}{\text{س}}$ ∴ $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$

(٤) ٣س ص = ٨ بالقسمة ÷ ٣س

$\text{ص} = \frac{٨}{٣\text{س}}$ ∴ $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$

---

(٥) $\frac{\text{س}_١\ \text{ص}_١}{\text{س}_٢\ \text{ص}_٢} = ١$

$\text{س}_١\ \text{ص}_١ = \text{س}_٢\ \text{ص}_٢$

∴ $\frac{\text{س}_١}{\text{س}_٢} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{ص}_١}$ ∴ $\text{س} \propto \frac{١}{\text{ص}}$

---

(٦) $\text{س}^٤\ \text{ص}^٢ - ١٤\ \text{س}^٢\ \text{ص} + ٤٩ = ٠$

$(\text{س}^٢\ \text{ص} - ٧)(\text{س}^٢\ \text{ص} - ٧) = ٠$

$\text{س}^٢\ \text{ص} - ٧ = ٠$

$\text{س}^٢\ \text{ص} = ٧$ بالقسمة ÷ $\text{س}^٢$

$\text{ص} = \frac{١٢}{\text{س}^٢}$ ∴ $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^٢}$

---

(٧) $\text{س}^٢\ \text{ص}^٢ + ٤ = ٤\ \text{س ص}$

$\text{س}^٢\ \text{ص}^٢ - ٤\ \text{س ص} + ٤ = ٠$

(س ص − ٢) (س ص − ٢) = ٠

س ص − ٢ = ٠

س ص = ٢ بالقسمة ÷ س

$\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}}$ ∴ $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}}$

---

(٨) $\text{ص}^٢ - ٦\ \text{س ص} + ٩\ \text{س}^٢ = ٠$

(ص − ٣ س) (ص − ٣ س) = ٠

ص − ٣ س = ٠

ص = ٣ س

∴ ص ∝ س

(٩) م^{٢}ب^{٢} + $\frac{١}{٤}$ = مب

م^{٢}ب^{٢} - مب + $\frac{١}{٤}$ = ٠

(مب − $\frac{١}{٢}$) (مب − $\frac{١}{٢}$) = ٠

مب − $\frac{١}{٢}$ = ٠

مب = $\frac{١}{٢}$ بالقسمة ÷ ب

م = $\frac{١}{٢ب}$ ∴ م ∝ $\frac{١}{ب}$

---

(١٠) ص − س = $\frac{١}{س}$ - $\frac{١}{ص}$

بالضرب × س ص

س ص^{٢} − س^{٢} ص = ص − س

س ص (ص − س) = ص − س

بالقسمة ÷ (ص − س)

س ص = ١   بالقسمة ÷ س

ص = $\frac{١}{س}$ ∴ص ∝ $\frac{١}{س}$

---

(٦)

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

الجدول السابق يوضح العلاقة بين س ، ص

(١) بين نوع التغير بين ص ، س

(٢) أوجد ثابت التناسب

(٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

من الجدول نلاحظ نقص قيم س مع زيادة قيم ص

أى أن التغير عكسى

ص ∝ $\frac{١}{س}$ ص = $\frac{م}{س}$

بالتعويض عن س = ٢ عندما ص = ٦

$\frac{٦}{١}$ = $\frac{م}{٢}$ م = $\frac{٢ \times ٦}{١}$ = ١٢

∴ ثابت التناسب م = ١٢   ص = $\frac{١٢}{س}$

قيمة ص عندما س = ٣   ص = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

(٧) إذا كانت س = ل + ٩ و كانت ل ∝ ص

فأوجد العلاقة بين ل ، ص

علماً بأن س = ٢٤ عندما ص = ٥

ثم أوجد قيمة ص عندما ل = ١٢

∵ ل ∝ ص   ∴ ل = م ص

∵ س = ل + ٩   ∴ س = م ص + ٩

بالتعويض عن س = ٢٤ عندما ص = ٥

٢٤ = م × ٥ + ٩

٢٤ = ٥ م + ٩

٢٤ ـ ٩ = ٥ م

١٥ = ٥ م   بالقسمة ÷ ٥

م = ٣

∵ ل = م ص   ∴ ل = ٣ ص   مطلوب ١

قيمة ص عندما ل = ١٢

١٢ = ٣ ص   بالقسمة ÷ ٣

ص = ٤   مطلوب ٢

(٨) إذا كانت س = ع + ٨
و كانت ع تتناسب عكسياً مع ص
، ع = ٢ عندما ص = ٣
أوجد قيمة ص عندما س = ٣

∵ $\text{ع} \propto \frac{١}{\text{ص}}$ ∴ $\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ص}}$

بالتعويض ع = ٢ عندما ص = ٣

$\frac{٢}{١} = \frac{\text{م}}{٣}$ $\text{م} = \frac{٣ \times ٢}{١} = ٦$

∵ $\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ص}}$ ∴ $\text{ع} = \frac{٦}{\text{ص}}$

∵ س = ع + ٨

∴ $\text{س} = \frac{٦}{\text{ص}} + ٨$

قيمة ص عندما س = ٣

∵ $\text{س} = \frac{٦}{\text{ص}} + ٨$ ∴ $٣ = \frac{٦}{\text{ص}} + ٨$

∴ $٣ - ٨ = \frac{٦}{\text{ص}}$

$\frac{-٥}{١} = \frac{٦}{\text{ص}}$ ∴ $\text{ص} = \frac{٦ \times ١}{-٥} = \frac{-٦}{٥}$

(٩) إذا كانت ص = م + ٧ و كانت م تتناسب عكسياً مع مربع س ، م = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$
فأوجد العلاقة بين ص ، س
ثم أوجد قيمة ص عندما س=٦

∵ $\text{م} \propto \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ∴ $\text{م} = \frac{\text{م}}{\text{س}^{٢}}$

بالتعويض م = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

$\frac{١٨}{١} = \frac{\text{م}}{(\frac{٢}{٣})^{٢}}$

$\text{م} = \frac{\frac{٤}{٩} \times ١٨}{١} = ٨$

∵ $\text{م} = \frac{\text{م}}{\text{س}^{٢}}$ ∴ $\text{م} = \frac{٨}{\text{س}^{٢}}$

∵ ص = م + ٧ ∴ $\text{ص} = \frac{٨}{\text{س}^{٢}} + ٧$

مطلوب ١

قيمة ص عندما س = ٦

$\text{ص} = \frac{٨}{(٦)^{٢}} + ٧ = \frac{٨}{٣٦} + ٧ = ٧\frac{٢}{٩}$

مطلوب ٢

(١٠) إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$

اثبت ان ص $\propto$ ع

$$\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$$

بجمع مقدمات و توالى النسبة الأولى و الثانية

$$\frac{٢١س - ص + ص}{٧س - ع + ع} = \frac{٢١س}{٧س} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{٢١س}{٧س} = \frac{ص}{ع}$$

$$\frac{٢١س}{ص} = \frac{٧س}{ع}$$ بضرب حدي النسبة الثانية × ٣

$$\frac{٢١س}{ص} = \frac{٢١س}{٣ع}$$

$$\frac{٢١س}{٢١س} = \frac{ص}{٣ع}$$

$$\frac{ص}{٣ع} = ١$$

ص = ٣ ع

∴ ص $\propto$ ع

علم الإحصاء هو جمع البيانات و تنظيمها و تمثيلها

مصادر جمع البيانات

(١) مصادر أولية (ميدانية)

مثل المقابلة الشخصية أو الإستبيان

(٢) مصادر ثانوية تاريخية

مثل وسائل الإعلام أو الإنترنت أو نشرات الجهاز المركزى للتعبئة العامة و الإحصاء

أسلوب جمع البيانات

(١) أسلوب الحصر الشامل

مثل عمل قاعدة بيانات لجميع العاملين بالدولة او التعداد العام للسكان

(٢) أسلوب العينات

مثل دراسة مجتمع الأسماك
أو فحص دم مريض
أو فحص إنتاج مصنع

أنواع العينات

(١) الإختيار المتحيز (عينة غير عشوائية)
(٢) الإختيار العشوائى (عينة عشوائية)

و تنقسم العينات العشوائية إلى نوعين :
(أ) عينة عشوائية بسيطة : من مجتمع متجانس
(ب) عينة عشوائية طبقية: من مجتمع غير متجانس
مثل مصنع ينتج أنواع مختلفة من الأجهزة

قاعدة

عدد مفردات الطبقة فى العينة

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقة}}{\text{عدد مفردات المجتمع}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية
٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ،
٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ،
٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ،
١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة
و أردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيه كل طبقة بحسب حجمها فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة .

الحل

عدد مفردات المجتمع الكلى =
٤٠٠٠+٣٠٠٠+٢٠٠٠+١٠٠٠=١٠٠٠٠طالب

عدد مفردات الطبقة الأولى =

$$\frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٢٠٠ \text{ طالب}$$

عدد مفردات الطبقة الثانية =

$$\frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٥٠ \text{ طالب}$$

عدد مفردات الطبقة الثالثة =

$$\frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٠٠ \text{ طالب}$$

عدد مفردات الطبقة الثالثة =

$$\frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠ \text{ طالب}$$

مقاييس النزعة المركزية الوسط الحسابى و الوسيط و المنوال

مقاييس التشتت المدى و الإنحراف المعيارى

التشتت لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها
و يكون التشتت صغيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً
و يكون التشتت كبيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيراً
كما يكون التشتت صفر إذا تساوت جميع المفردات
أى أن التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعة

المدى

المدى (أبسط و أسهل مقاييس التشتت) هو الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لمجموعة من المفردات

(١) احسب المدى لكل مما يأتى

(م) ٥٣ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ٥٧ ، ٥١ ، ٥٨

المدى = ٦٠ ــ ٥١ = ٩

(ب) ٤٢ ، ٤٥، ٩٢ ، ٤٧ ، ٤٩ ، ٥٢

المدى = ٩٢ ــ ٤٢ = ٥٠

الإنحراف المعيارى

الانحراف المعيارى هو أدق مقاييس التشتت و أكثرها انتشاراً
وهو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

أولاً حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم

١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

الوسط الحسابى $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$\overline{\text{س}} = \frac{١٢+١٣+١٦+١٨+٢١}{٥} = ١٦$$

س	س - $\overline{\text{س}}$	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢}
١٢	١٢ - ١٦ = - ٤	١٦
١٣	١٣ - ١٦ = - ٣	٩
١٦	١٦ - ١٦ = ٠	٠
١٨	١٨ - ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ - ١٦ = ٥	٢٥
	المجموع	٥٤

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} \simeq ٣و٢٨٦$$

ثانياً حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى

(١)فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة

عدد الوحدات	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

س	ك	س×ك	$(س - \overline{س})$	$(س - \overline{س})^٢$	$(س - \overline{س})^٢ \times ك$
٠	٣	٠ × ٣ = ٠	٠ - ٣ = -٣	٩	٩ × ٣ = ٢٧
١	١٦	١ × ١٦ = ١٦	١ - ٣ = -٢	٤	٤× ١٦ = ٦٤
٢	١٧	٢ × ١٧ = ٣٤	٢ - ٣ = -١	١	١×١٧ = ١٧
٣	٢٥	٣ × ٢٥ = ٧٥	٣ - ٣ = ٠	٠	٠× ٢٥ = ٠
٤	٢٠	٤ × ٢٠ = ٨٠	٤ - ٣ = ١	١	١× ٢٠ = ٢٠
٥	١٩	٥ × ١٩ = ٩٥	٥ - ٣ = ٢	٤	٤ × ١٩ = ٧٦
	مجـ (ك)=١٠٠	مجـ (س×ك)=٣٠٠			مجـ =٢٠٤

الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{مجـ (س×ك)}{مجـ (ك)}$

$\overline{س} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

$\sigma = \sqrt{\frac{مجـ(س - \overline{س})^٢ \times ك}{مجـ (ك)}}$

$\sigma = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} \simeq$ ١و٤٢٨ وحدة

(٢) فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ تلميذاً فى أحد الاختبارات

المجموعات	٠ -	٤ -	٨ -	١٢ -	١٦ -
التكرار	٣	٥	٨	١٥	١٠

المجموعات	التكرار (ك)	مركز المجموعة (س)	س×ك	$(س - \overline{س})$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(س - \overline{س})^{٢}$×ك
٠ -	٢	٢	٤	- ٦و١٠	٣٦و١١٢	٧٢و٢٢٤
٤ -	٥	٦	٣٠	- ٦و٦	٥٦و٤٣	٨و٢١٧
٨ -	٨	١٠	٨٠	- ٦و٢	٧٦و٦	٠٨و٥٤
١٢ -	١٥	١٤	٢١٠	٤و١	٩٦و١	٤و٢٩
١٦ -	١٠	١٨	١٨٠	٤و٥	١٦و٢٩	٦و٢٩١
المجموع	٤٠		٥٠٤			٦و٨١٧

الوسط الحسابى $\overline{س} = \dfrac{\text{مجـ}\ (س×ك)}{\text{مجـ}\ (ك)}$

$\overline{س} = \dfrac{٥٠٤}{٤٠} = ٦و١٢$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ}\ (س - \overline{س})^{٢} \times ك}{\text{مجـ}\ (ك)}}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{٦و٨١٧}{٤٠}} \simeq$ ٥٢١و٤ درجة

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستينى للزوايا

١ درجة (١°) = ٦٠ دقيقة (٦٠َ)

١دقيقة = ٦٠ ثانية (٦٠ً)

أكتب بالدرجات و الدقائق و الثوانى

١٨و٥٦° = ٤٨ً ١٠َ ٥٦°

الخطوات

ووو ⟹ = ⟹ 18 ⟹ . ⟹ 56

أكتب بالدرجات فقط

١٨ً ٤٥َ ٦٤° = ٥٥٧و٦٤°

الخطوات

ووو ⟹ 45 ⟹ ووو ⟹ 64

ووو = ⟹ ووو ⟹ 18 ⟹

إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٣: ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى

نفرض قياس الزاويتين ٣س ، ٥س

٣س + ٥س = ٩٠°

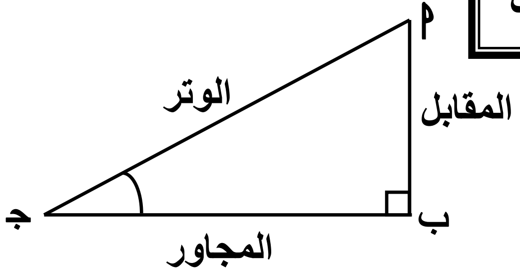
٨س = ٩٠° (÷٨)

س = ٢٥و١١°

قياس الزاوية الأولى = ٣ × ٢٥و١١ = ٧٥و٣٣°
=٤٥َ ٣٣°

قياس الزاوية الثانية = ٥ × ٢٥و١١ = ٢٥و٥٦°
=١٥َ ٥٦°

حساب المثلثات



فى Δ ﻡ ب ج القائم الزاوية في ب

النسبة بين طول الضلع المقابل للزاوية ج ، طول الوتر تسمى جيب الزاوية (جا ج) (Sin)

النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية ج ، طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية (جتا ج) (cos)

النسبة بين طول الضلع المقابل للزاوية ج ، طول الضلع المجاور لزاوية ج تسمى ظل الزاوية (ظا ج) (tan)

جا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ﻡب}}{\text{ﻡ ج}}$

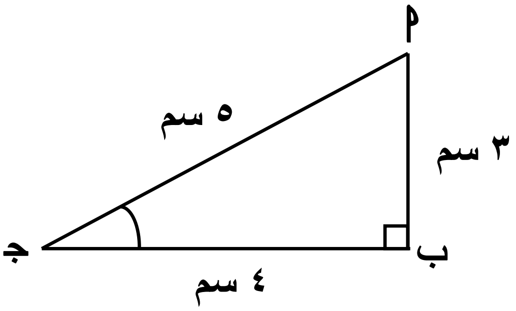
جتا ج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ﻡ ج}}$

ظا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ﻡب}}{\text{ب ج}}$

جا ﻡ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ﻡ ج}}$

جتا ﻡ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ﻡب}}{\text{ﻡ ج}}$

ظا ﻡ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ﻡب}}$



فى Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب

جا ج $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ ج}} = \frac{٣}{٥}$

جتا ج $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{٤}{٥}$

ظا ج $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب ج}} = \frac{٣}{٤}$

جا أ $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{٤}{٥}$

جتا أ $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ ج}} = \frac{٣}{٥}$

ظا أ $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أب}} = \frac{٤}{٣}$

<u>لاحظ أن</u>

جا أ = جتا ج

جتا أ = جا ج

جا ٢٠° = جتا ٧٠°

جا أ + جتا ج = ٢جا أ أو٢جتا ج

جا أ + جتا أ > ١

ظا ج = جا ج ÷ جتا ج

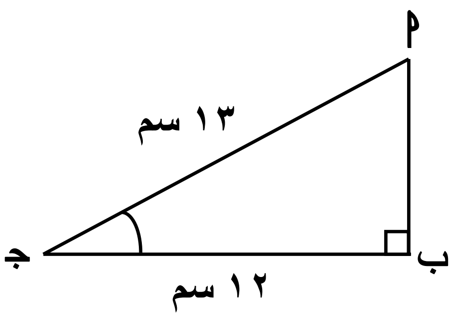
ظا أ × ظا ج = ١

جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١

(١) Δ أ ب ج القائم الزاوية في ب

أوجد كل من طول $\overline{\text{أ ج}}$ ، جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ

ثم اثبت أن جا أ جتا ج + جتا أ جا ج = ١



فى Δ أ ب ج القائم فى ب

(أب)^{٢} = (أج)^{٢} - (ب ج)^{٢}

(أب)^{٢} = (١٣)^{٢} - (١٢)^{٢}

(أب)^{٢} = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥

أب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم م١

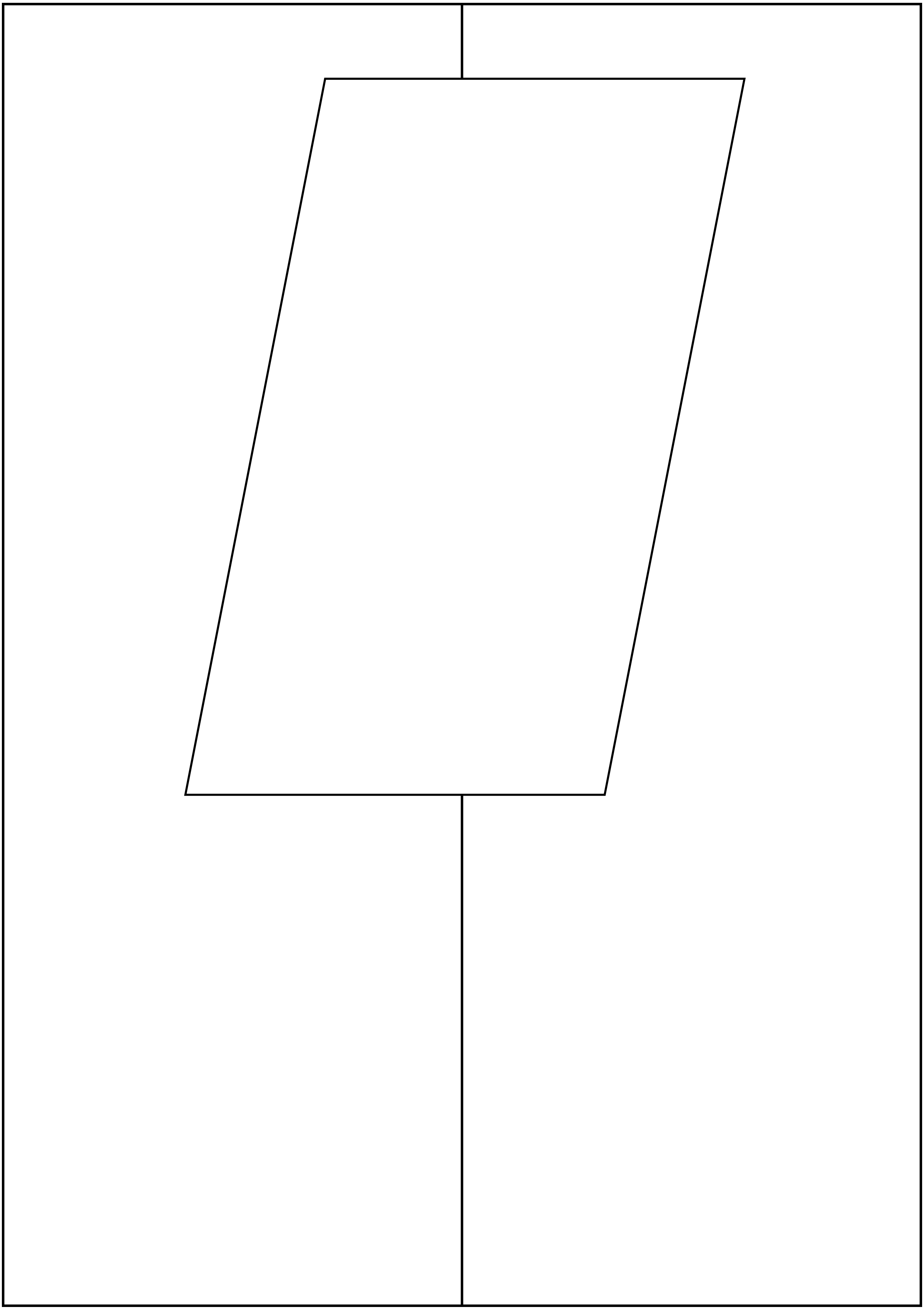
جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = $\left(\frac{١٢}{١٣}\right)^{٢} + \left(\frac{٥}{١٣}\right)^{٢}$

$= \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = ١$ م٢

جا أ جتا ج + جتا أ جا ج

$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣}$

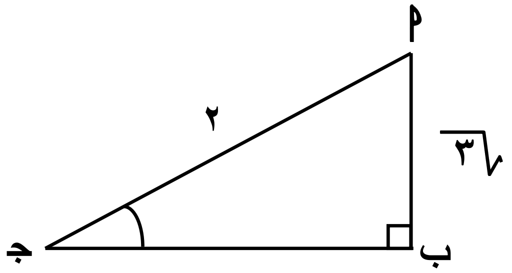
$= \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = ١$ م٣



(٢) Δ ﻡ ب جـ القائم الزاوية في ب

، ٢ ﻡ ب = $\sqrt{٣}$ ﻡ جـ

أوجد النسب المثلثية للزاوية جـ



∵ ٢ ﻡ ب = $\sqrt{٣}$ ﻡ جـ

∴ $\frac{\text{ﻡب}}{\text{ﻡجـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فى Δ ﻡ ب جـ القائم فى ب

$(\text{بجـ})^٢ = (\text{ﻡجـ})^٢ - (\text{ﻡب})^٢$

$(\text{بجـ})^٢ = (٢)^٢ - (\sqrt{٣})^٢$

$(\text{بجـ})^٢ = ٤ - ٣ = ١$

بجـ = $\sqrt{١}$ = ١

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ﻡب}}{\text{ﻡ جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

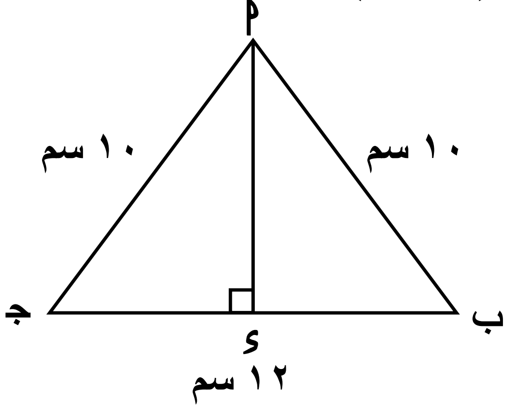
جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ﻡ جـ}} = \frac{١}{٢}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ﻡب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{١}$

(٣) Δ ﻡ ب جـ فيه $\overline{\text{ﻡ ب}} = \overline{\text{ﻡ جـ}}$ = ١٠ سم

، ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{\text{ﻡ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

أوجد جا (∠جـ ﻡ ء) ، جتا (∠جـ ﻡ ء) ، ظا (∠جـ ﻡ ء)



فى Δ ﻡ ب جـ متساوى الساقين

∵ ﻡب = ﻡجـ

∵ $\overline{\text{ﻡ ء}} \perp \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{ﻡ ء}}$ ينصف (∠ ﻡ)

∴ $\overline{\text{ﻡ ء}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ ب جـ = ١٢ سم ∴ ء جـ = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

فى Δ ﻡ ء جـ القائم فى ء

$(\text{ﻡ ء})^٢ = (\text{ﻡجـ})^٢ - (\text{ءجـ})^٢$

$(\text{ﻡ ء})^٢ = (١٠)^٢ - (٦)^٢$

$(\text{ﻡ ء})^٢ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

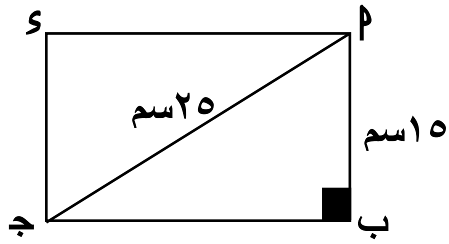
ﻡ ء = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

جا (∠جـ ﻡ ء) = $\frac{\text{ءجـ}}{\text{ﻡجـ}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

جتا (∠جـ ﻡ ء) = $\frac{\text{ﻡ ء}}{\text{ﻡجـ}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

ظا (∠جـ ﻡ ء) = $\frac{\text{ءجـ}}{\text{ﻡ ء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

(٤) أب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥سم
، أ جـ = ٢٥ سم أوجد ق (∠ أجـب)
، مساحة المستطيل أب جـ ء



∵ أب جـ ء مستطيل ∴ ق (∠ أب جـ) = ٩٠°
فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

جا (∠ أجـب) = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{١٥}{٢٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

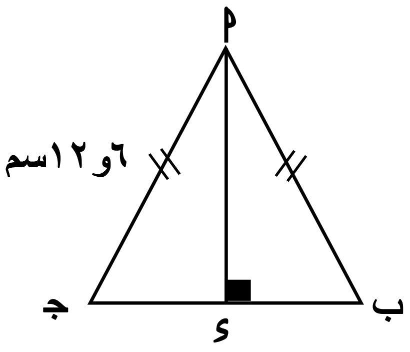
ق (∠ أجـب) = Shift ⟸ sin $\frac{٣}{٥}$ =
٣٦° ٥٢َ ١٢ً

فى المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب
(ب جـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} − (أب)^{٢}
= (٢٥)^{٢} − (١٥)^{٢} = ٤٠٠

ب جـ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض
= ب جـ × أب = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ سم^{٢}

(٥) Δ أب جـ متساوى الساقين فيه
أب = أجـ = ٦و١٢سم ، ق (∠ جـ) = ٢٤َ ٨٤°
أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول ب جـ



العمل نرسم $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

فى Δ أب جـ مثلث متساوى الساقين

∵ أب = أجـ ∵ $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أء}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

فى Δ أ ء جـ القائم الزاوية فى ء

جتا جـ = $\frac{\text{ءجـ}}{\text{أجـ}}$

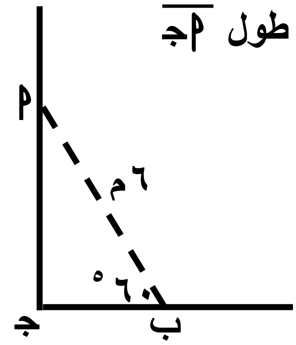
$\frac{\text{جتا ٢٤َ ٨٤°}}{١}$ = $\frac{\text{ء جـ}}{\text{٦و١٢}}$

ء جـ = $\frac{\text{٦و١٢ × جتا ٢٤َ ٨٤°}}{١}$ ≃ ١و٢ سم

∴ ب جـ = ١و٢ × ٢ ≃ ٢و٤ سم

(٦) سلم أب طوله ٦ أمتار

يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسي و طرفه ب على أرض أفقية فإذا كانت ج هى مسقط نقطة أ على سطح الأرض و كان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° أوجد طول أج



فى Δ أ ب ج القائم الزاوية فى ج

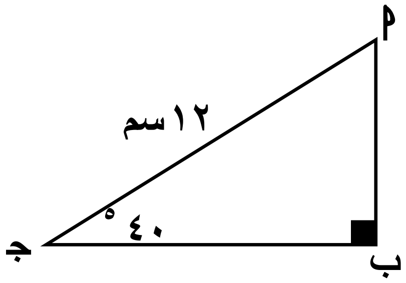
جا ب = أ ج / أ ب

جا ٦٠° / ١ = أ ج / ٦

أج = ٦ × جا ٦٠° / ١ = ٣ √٣ سم

(٧) أ ب ج Δ قائم الزاوية فى ب

فيه أ ج = ١٢ سم، ق (∠ ب) = ٤٠° أوجد طول أ ب لأقرب رقم عشرى واحد ، طول ب ج لأقرب سم



فى Δ أ ب ج القائم الزاوية فى ب

جا ج = أ ب / أ ج

جا ٤٠° / ١ = أ ب / ١٢

أ ب = ١٢ × جا ٤٠° / ١ ≃ ٧و٧ سم

جتا ج = ب ج / أ ج

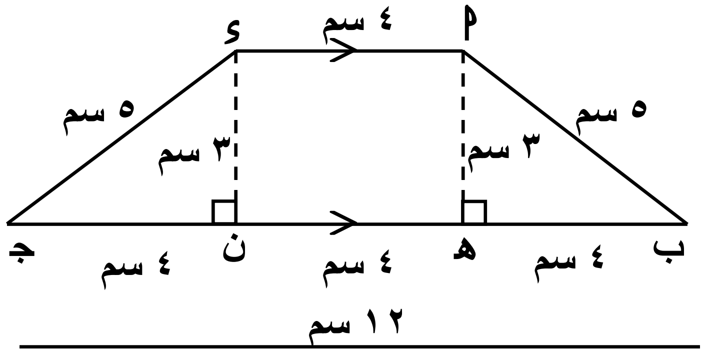
جتا ٤٠° / ١ = ب ج / ١٢

أ ب = ١٢ × جتا ٤٠° / ١ ≃ ٩ سم

(٨) أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه
$\overline{أء} // \overline{بجـ}$ ، أ ء = ٤ سم ، أ ب = ٥ سم
، ب جـ = ١٢ سم

اثبت أن $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ جـ + جتا}^{٢}\text{ ب}} = ٣$

-



العمل نرسم $\overline{أهـ} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{ءن} \perp \overline{بجـ}$

، ∵ $\overline{أء} // \overline{هـن}$ ∴ أ هـ ن ء مستطيل

فى Δ أ ب هـ ، Δ ء ن جـ

فيهما
أ ب = ء جـ
أ هـ = ء ن
ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ ء ن جـ) = ٩٠°

∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن ب هـ = ن جـ

، ∵ هـ ن = ٤ سم

∴ ب هـ + ن جـ = ١٢ - ٤ = ٨ سم

∴ ب هـ = ن جـ = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

فى Δ أ هـ ب القائم فى هـ

$(\text{أ هـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} - (\text{ب ء})^{٢}$

$(\text{أ هـ})^{٢} = (٥)^{٢} - (٤)^{٢}$

$(\text{أ هـ})^{٢} = ٢٥ - ١٦ = ٩$

أ هـ = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

فى Δ أ ب هـ القائم الزاوية فى هـ

$\text{ظا }(\angle \text{ب}) = \frac{\text{أهـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{٣}{٤}$

$\text{جتا}^{٢}(\angle \text{ب}) = \left(\frac{\text{ب هـ}}{\text{أب}}\right)^{٢} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$

فى Δ ء ن جـ القائم الزاوية فى ن

$\text{جتا }(\angle \text{جـ}) = \frac{\text{ن جـ}}{\text{ء جـ}} = \frac{٤}{٥}$

$\text{جا}^{٢}(\angle \text{جـ}) = \left(\frac{\text{ء ن}}{\text{ء جـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$

$\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ جـ + جتا}^{٢}\text{ ب}}$

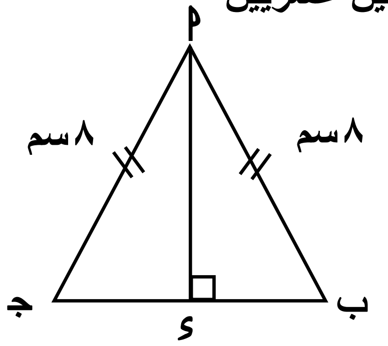
$= \left(٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}\right) \div \left(\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}\right) = ٣$

(٩) Δ أب جـ متساوى الساقين فيه

أب = أجـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢ سم

أوجد ق(∠ب) ، مساحة المثلث أب جـ

لأقرب رقمين عشريين



العمل نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

فى Δ أب جـ متساوى الساقين

∵ أب = أجـ   ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ب ء = ء جـ = ٦ سم

فى Δ أب ء القائم فى ء

جتا ب = $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

ق(∠ب) = Shift ⟸ cos $\frac{٣}{٤}$

= ٣٥ ً ٢٤ َ ٤١ ° مطلوب ١

فى Δ أب ء القائم فى ء

(أ ء)^2 = (أب)^2 - (ب ء)^2

= (٨)^2 - (٦)^2 = ٢٨

أ ء = $\sqrt{٢٨}$ = ٢ $\sqrt{٧}$ سم

مساحة Δ أب جـ

= $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢ $\sqrt{٧}$ ≃ ٣١و٧٥ سم^2

مطلوب ٢

(١٠) أب جـ ء متوازى أضلاع

مساحته ٩٦ سم^2

، $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

، أهـ = ٨ سم

أوجد طول $\overline{\text{أ ء}}$ ، ق(∠ب) ، طول $\overline{\text{أب}}$

لأقرب رقم عشري

مساحة متوازى الأضلاع = طول القاعدة × الإرتفاع

ب جـ × أهـ = ٩٦

ب جـ × ٨ = ٩٦

ب جـ = أ ء = ٩٦ ÷ ٨ = ١٢ سم   مطلوب ١

∵ ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

∴ ب هـ = ١٢ ÷ ٤ = ٣ سم

Δ أب هـ القائم فى هـ

ظا ب = $\frac{\text{أهـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{٨}{٣}$

ق(∠ب) = Shift ⟸ tan $\frac{٨}{٣}$

= ٣٨ ً ٢٦ َ ٦٩ °   مطلوب ٢

فى Δ أب هـ القائم فى هـ

(أب)^2 = (أهـ)^2 + (ب هـ)^2

= (٨)^2 + (٣)^2 = ٧٣

أب = $\sqrt{٧٣}$ ≃ ٨و٥ سم   مطلوب ٣

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
ظا	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$\sqrt{٣}$	١

(١) أوجد قيمة

جتا٦٠° جا٣٠° - جا٦٠° ظا٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = - \frac{١}{٢}$

(٢) برهن على صحة ما يلى

جا^{٢} ٣٠° = ٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

الطرف الأيمن

جا^{٢} ٣٠° $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$ ①

الطرف الأيسر

٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

$= ٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - (١)^{٢} = ٥ \times \frac{١}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$ ②

من ١ ، ٢

∴ جا^{٢} ٣٠° = ٥ جتا^{٢} ٦٠° - ظا^{٢} ٤٥°

(٣) أوجد قيمة س التى تحقق

س جا٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠°

س $\times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

س $\times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$

س $\times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$ $\qquad$ $\left(\div \frac{١}{٤}\right)$

س = ٣

(٤) أوجد قيمة س التى تحقق

٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠° - ٢ظا٤٥°

٢ جا س $= (\sqrt{٣})^{٢} - ٢ \times ١$

٢ جا س = ٣ - ٢

٢ جا س = ١ $\qquad$ (÷ ٢)

جا س $= \frac{١}{٢}$

س = Shift ⟸ sin $\frac{١}{٢}$ = ٣٠°

(٥) أكمل ما يأتى

(١) جا س = ٠و٥ $\qquad$ س = ٠٠٠٠٠

س = Shift ⟸ sin ٠و٥ = ٣٠°

(٢) جا ٣س = ٠و٥ $\qquad$ س = ٠٠٠٠٠

٣س = Shift ⟸ sin ٠و٥ = ٣٠°

٣س = ٣٠° $\qquad$ س = ٣٠ ÷ ٣ = ١٠°

(٣) ٢ جا س = $\sqrt{٣}$ س = ٠٠٠٠٠

بالقسمة على ٢

جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س = Shift ⟸ sin $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦٠°

---

(٤) ظا ٣س = ١   س = ٠٠٠٠٠

٣س = Shift ⟸ tan ١ = ٤٥°

٣س = ٤٥°   س = ٤٥ ÷ ٣ = ١٥°

---

(٥) جتا $\frac{س}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س = ٠٠٠٠٠٠

$\frac{س}{٣}$ = Shift ⟸ cos $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣٠°

$\frac{س}{٣}$ = ٣٠°   بالضرب × ٣

س = ٩٠°

---

(٦) ظا (س+١٠) = $\sqrt{٣}$ س = ٠٠٠٠٠

(س+١٠) = Shift ⟸ tan $\sqrt{٣}$ = ٦٠°

س+١٠ = ٦٠°

س= ٦٠ – ١٠ = ٥٠°

---

(٧) ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ س = ٠٠٠٠٠

٣س = Shift ⟸ tan $\sqrt{٣}$ = ٦٠°

٣س = ٦٠°   س = ٦٠° ÷ ٣ = ٢٠°

---

(٨) جا ٣٠° = جتا س   س = ٠٠٠٠٠

جتا س = جا ٣٠° = ٥و٠

س = Shift ⟸ cos ٥و٠ = ٦٠°

---

(٩) ظا $\frac{٣س}{٢}$ = ١   س = ٠٠٠٠٠

$\frac{٣س}{٢}$ = Shift ⟸ tan ١ = ٤٥°

$\frac{٣س}{٢}$ = ٤٥°   بالضرب × $\frac{٢}{٣}$

س = ٣٠°

---

(١٠) ٢جا ٣٠° جتا ٣٠° = جتاس   س = ٠٠٠

جتاس = ٢ × ٥و٠ × ٥و٠ = ٥و٠

س = Shift ⟸ cos ٥و٠ = ٦٠°

---

(١١)

جا س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠°

= ظا^{٢} ٤٥° - جتا^{٢} ٦٠°   س = ٠٠٠

جا س × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ × $\sqrt{٣}$ = ١^{٢} - (٥و٠)^{٢}

جا س × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ بالضرب × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س = Shift ⟸ sin $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦٠°

---

(١٢) إذا كان أب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ،

ظا ب = ١ فإن ظا جـ جا جـ جتا جـ = ٠٠٠٠٠

∵ ظا ب = ١ ∴ ق (∠ب) = ٤٥°

∴ ق (∠جـ) = ٤٥°

∴ ظا جـ جا جـ جتا جـ = ١ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

البعد بين نقطتين

بفرض م (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) نقطتين فى المستوى فإن

$$م ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$م ب = \sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$$

(١) إذا كان م (٢، ٤) ، ب (٥، ٦) أوجد م ب

$$م ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$م ب = \sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٦ - ٤)^٢} = \sqrt{١٣} \text{ وحدة طول}$$

(٢) إذا كان م (-١، -٢) ، ب (-٣، ٤) أوجد م ب

$$م ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$م ب = \sqrt{((-٣) - (-١))^٢ + (٤ - (-٢))^٢}$$

$$= ٢\sqrt{١٠} \text{ وحدة طول}$$

(٣) إذا كان م (٣، ٤) أوجد البعد بين ونقطة الأصل (٠، ٠)

$$م ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$م ب = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٤ - ٠)^٢} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزواياه

فى Δ م ب جـ

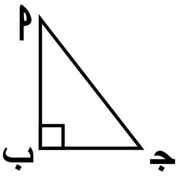
بفرض أن $\overline{م ب}$ هو أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث

(١) إذا كان $(م ب)^٢ = (م جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$
فإن Δ م ب جـ قائم الزاوية فى جـ

(٢) إذا كان $(م ب)^٢ > (م جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$
فإن Δ م ب جـ منفرج الزاوية فى جـ

(٣) إذا كان $(م ب)^٢ < (م جـ)^٢ + (ب جـ)^٢$
فإن Δ م ب جـ حاد الزوايا

(٤) اثبت أن المثلث الذى رؤوسه أ (١ ، ٤) ، ب(− ١ ، − ٢) ، جـ(٢ ، − ٣) قائم الزاوية و أوجد مساحة سطحه



أب $= \sqrt{(-١-١)^{٢} + (-٢-٤)^{٢}} = \sqrt{٤٠}$ **وحدة طول**

أجـ $= \sqrt{(٢-١)^{٢} + (-٣-٤)^{٢}} = \sqrt{٥٠}$ **وحدة طول**

ب جـ $= \sqrt{(٢-(-١))^{٢} + (-٣-(-٢))^{٢}} = \sqrt{١٠}$ **وحدة طول**

(أجـ)^{٢}	(أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}
$(\sqrt{٥٠})^{٢}$	$(\sqrt{٤٠})^{٢} + (\sqrt{١٠})^{٢}$
٥٠	٤٠ + ١٠ = ٥٠

∴ (أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

∴المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب   **مطلوب ١**

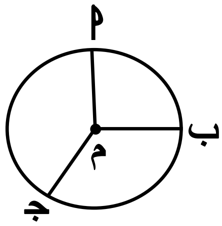
مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ **طول القاعدة × الإرتفاع**

$= \frac{١}{٢}$ **ب جـ × أب**

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times \sqrt{٤٠} = ١٠$ **وحدة مساحة مربعة**

مطلوب ٢

(٥) اثبت أن النقط أ (٣ ، − ١) ، ب(− ٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، − ٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م(− ١ ، ٢) ثم أوجد مساحة سطح الدائرة و محيطها بدلالة π



أ م $= \sqrt{(-١-٣)^{٢} + (٢-(-١))^{٢}} = ٥$ **وحدة طول**

ب م $= \sqrt{(-١-(-٤))^{٢} + (٢-٦)^{٢}} = ٥$ **وحدة طول**

جـ م $= \sqrt{(-١-٢)^{٢} + (٢-(-٢))^{٢}} = ٥$ **وحدة طول**

∴ أ م = ب م = جـ م = نق

∴ النقط أ ، ب، جـ تقع على دائرة مركزها النقطة م

مساحة الدائرة = π **نق**^{٢}

$= \pi \times ٥ \times ٥ = ٢٥\,\pi$ **سم**^{٢}

محيط الدائرة = ٢ π **نق**

$= ٢ \times \pi \times ٥ = ١٠\,\pi$ **سم**

(٦) إذا كان بعد النقطة أ (٤ ، ١) عن النقطة ب(١ ، ص) يساوى ٥ وحدة طول أوجد قيمة ص

$\text{أب} = \sqrt{(١ - ٤)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢}} = ٥$

$\text{أب} = \sqrt{٩ + (\text{ص} - ١)^{٢}} = ٥$

بتربيع الطرفين

$٩ + (\text{ص} - ١)^{٢} = ٢٥$

$\therefore (\text{ص} - ١)^{٢} = ٢٥ - ٩$

$\therefore (\text{ص} - ١)^{٢} = ١٦$

$\therefore (\text{ص} - ١) = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$

$\text{ص} - ١ = ٤$	$\text{ص} - ١ = - ٤$
$\text{ص} = ٤ + ١ = ٥$	$\text{ص} = - ٤ + ١ = - ٣$
$\text{ص} = ٥$	$\text{ص} = - ٣$

---

(٧) إذا كان أ (س ، ٥) ، ب(٦ ، ١) ، أب = ٢ √٥ وحدة طول أوجد قيمة س

$\text{أب} = \sqrt{(\text{س} - ٦)^{٢} + (٥ - ١)^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$

$\text{أب} = \sqrt{(\text{س} - ٦)^{٢} + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$

بتربيع الطرفين

$(\text{س} - ٦)^{٢} + ١٦ = ٢٠$

$\therefore (\text{س} - ٦)^{٢} = ٢٠ - ١٦$

$\therefore (\text{س} - ٦)^{٢} = ٤$

$\therefore (\text{س} - ٦) = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

$\text{س} - ٦ = ٢$	$\text{س} - ٦ = - ٢$
$\text{س} = ٢ + ٦ = ٨$	$\text{س} = - ٢ + ٦ = - ٤$
$\text{س} = ٨$	$\text{س} = ٤$

(٨) إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، ج(٢ ، - ٢) ، أب = ب ج أوجد قيمة س

$\text{ب ج} = \sqrt{(٢ - ٣)^{٢} + (- ٢ - ٢)^{٢}} = \sqrt{١٧}$ وحدة طول

$\because \text{أب} = \text{ب ج}$

$\text{أب} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}} = \sqrt{١٧}$

$\text{أب} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + ١} = \sqrt{١٧}$

بتربيع الطرفين

$(\text{س} - ٣)^{٢} + ١ = ١٧$

$\therefore (\text{س} - ٣)^{٢} = ١٧ - ١$

$\therefore (\text{س} - ٣)^{٢} = ١٦$

$\therefore (\text{س} - ٣) = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$

$\text{س} - ٣ = ٤$	$\text{س} - ٣ = - ٤$
$\text{س} = ٤ + ٣ = ٧$	$\text{س} = - ٤ + ٣ = - ١$
$\text{س} = ٧$	$\text{س} = - ١$

---

(٩) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) يساوى وحدة طول واحدة أوجد قيمة أ

$\sqrt{(\text{أ} - ٠)^{٢} + (٠ - ١)^{٢}} = ١$

$\sqrt{(\text{أ})^{٢} + ١} = ١$

بتربيع الطرفين

$\text{أ}^{٢} + ١ = ١$

$\therefore \text{أ}^{٢} = ١ - ١$

$\therefore \text{أ}^{٢} = ٠$

$\therefore \text{أ} = ٠$

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

بفرض ٲ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) نقطتين فى المستوى ، جـ منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ فإن

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢} \right)$$

---

(١) إذا كانت جـ هى منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ حيث ٲ (٣، ٤) ، ب (٥، ٦) أوجد إحداثيات جـ

$$\therefore \text{جـ} = \left(\frac{٣ + ٥}{٢} \text{ ، } \frac{٤ + ٦}{٢} \right) = (٤ ، ٥)$$

---

(٢) إذا كانت جـ (٦، -٤) هى منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ حيث ٲ (٥، -٣) أوجد إحداثيات ب

بفرض ب (س، ص)

ٲ(٥، -٣) جـ(٦، -٤) ب(س ، ص)

$$\therefore \text{جـ} = \left(\frac{٥ + \text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{-٣ + \text{ص}}{٢} \right) = (٦ ، -٤)$$

$\frac{٥ + \text{س}}{٢} = \frac{٦}{١}$	$\frac{-٣ + \text{ص}}{٢} = \frac{-٤}{١}$
٥ + س = ١٢	-٣ + ص = -٨
س = ١٢ - ٥	ص = -٨ + ٣
س = ٧	ص = -٥

∴ جـ = (٧، -٥)

(٣) إذا كانت جـ (٤، ٦) هى منتصف $\overline{\text{ٲب}}$ حيث ٲ (س ، ٣) ، ب (٦، ص) أوجد س ، ص

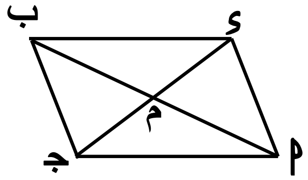
ٲ(س، ٣) جـ(٤، ٦) ب(٦ ، ص)

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س} + ٦}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \right) = (٤ ، ٦)$$

$\frac{\text{س} + ٦}{٢} = \frac{٤}{١}$	$\frac{\text{ص} + ٣}{٢} = \frac{٦}{١}$
س + ٦ = ٨	ص + ٣ = ١٢
س = ٨ - ٦	ص = ١٢ - ٣
س = ٢	ص = ٩

---

(٤) إذا كانت ٲ (٦، ١) ، ب (٢، ٣)، جـ(٣، ١) ، ء (٥، ٣) اثبت أن ٲ ، ب ، جـ ، ء هى رؤوس متوازى أضلاع



$$\text{منتصف } \overline{\text{ٲب}} = \left(\frac{٦ + ٢}{٢} \text{ ، } \frac{١ + ٣}{٢} \right) = (٤ ، ٢)$$

$$\text{منتصف } \overline{\text{جـ ء}} = \left(\frac{٣ + ٥}{٢} \text{ ، } \frac{١ + ٣}{٢} \right) = (٤ ، ٢)$$

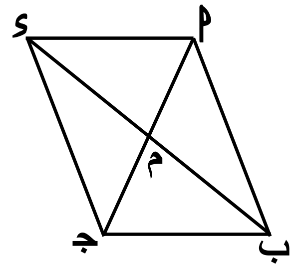
∴ م هى منتصف كل من $\overline{\text{ٲب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∴ الشكل ٲ جـ ب ء متوازى أضلاع

∴ ٲ ، ب ، جـ ، ء هى رؤوس متوازى أضلاع

(٤) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣، ٢) ، ب (٤، -٥)، جـ (٠، -٣) أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثي نقطة د



∵ أ ب جـ د متوازى أضلاع

∴ القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∴ م هى منتصف كل من $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$

$$م = \left(\frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{٢ + (-٣)}{٢}\right) = (١و٥ ، -و٥)$$

بفرض د (س، ص)

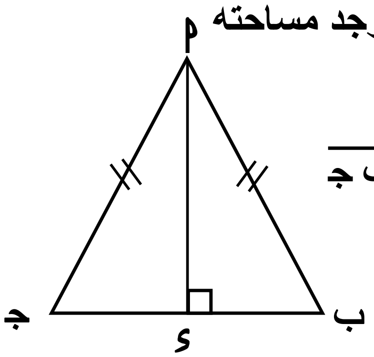
ب(٤، -٥)   م(١و٥، -و٥)   د(س ، ص)

$$م = \left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{-٥ + ص}{٢}\right) = (١و٥ ، -و٥)$$

$\frac{٤ + س}{٢} = \frac{١و٥}{١}$	$\frac{-٥ + ص}{٢} = \frac{-و٥}{١}$
٤ + س = ٣	-٥ + ص = -١
س = ٣ - ٤	ص = -١ + ٥
س = -١	ص = ٤

∴ د = (-١، ٤)

(٥) اثبت أن النقط أ (-٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، جـ(١ ، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين ثم اوجد مساحته



العمل نرسم $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

أب = $\sqrt{(-٣-٣)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = \sqrt{٥٢}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(١ - ٣)^٢ + (-٦-٤)^٢} = \sqrt{١٠٤}$ وحدة طول

أجـ = $\sqrt{(-٣-١)^٢ + (٠-(-٦))^٢} = \sqrt{٥٢}$ وحدة طول

لإيجاد مساحة المثلث أب جـ يجب تعيين طول العمود من أ على ب جـ

فى Δ أب جـ متساوى الساقين

∵ أب = أجـ ∵ $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أد}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$$∴ د = \left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{٤ - ٦}{٢}\right) = (٢، -١)$$

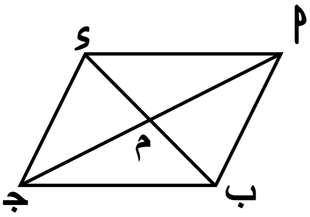
أد = $\sqrt{(-٣-٢)^٢ + (٠-(-١))^٢} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول

مساحة Δ أب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

= $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠٤} \times \sqrt{٢٦}$ = ٢٦ وحدة مساحة مربعة

(٦) اثبت أن النقط أ (٥ ، ٣) ، ب(٣ ، − ٢) ، جـ(− ٢ ، − ٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب ثم أوجد إحداثى نقطة ء التى تجعل الشكل معين و أوجد مساحة سطحه



أب = $\sqrt{(٣-٥)^{٢} + (-٢-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول

أجـ = $\sqrt{(-٢-٥)^{٢} + (-٤-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٩٨}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(-٢-٣)^{٢} + (-٤-(-٢))^{٢}}$ = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول

فى Δ أب جـ

$(أجـ)^{٢}$	$(أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$
$(\sqrt{٩٨})^{٢}$	$(\sqrt{٢٩})^{٢} + (\sqrt{٢٩})^{٢}$
٩٨	٥٨

∴ $(أجـ)^{٢} > (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$

∴المثلث أب جـ منفرج الزاوية فى ب

لكى يكون الشكل معيناً يجب أن يكون م منتصف كلاً من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب ء}$ و فيه ضلعان متجاوران متساويان (أب = ب جـ)

منتصف $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{٥ - ٢}{٢} ، \frac{٣ - ٤}{٢}\right)$

= (١و٥ ، −و٥)

ب(٣، −٢)   م(١و٥، −و٥)   ء(س ، ص)

$\frac{٣ + س}{٢} = \frac{١و٥}{١}$

٣ + س = ٣

س = ٣ − ٣

س = ٠

$\frac{-٢ + ص}{٢} = \frac{-و٥}{١}$

−٢ + ص = −١

ص = −١ + ٢

ص = ١

∴ ء = (٠ ، ١)

ب ء = $\sqrt{(٣-٠)^{٢} + (-٢-١)^{٢}}$ = $\sqrt{١٨}$ وحدة طول

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين

= $\frac{١}{٢}$ أجـ × ب ء

= $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٩٨} \times \sqrt{١٨}$ = ٢١ وحدة مساحة مربعة

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢)

$$م = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ملاحظات هامة

(١) ميل محور السينات يساوى صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى يوازى محور السينات يساوى صفر

(٣) ميل محور الصادات غير معرف

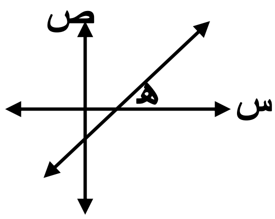
(٤) ميل أى مستقيم رأسى يوازى محور الصادات غير معرف

(٥) إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية موجبة

(٦) إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية سالبة

ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ميل الخط المستقيم = ظا هـ



حيث هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

---

(١) أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٦٩° ٢٦َ ٣٨ً

ميل المستقيم = ظا هـ

= ظا ٦٩° ٢٦َ ٣٨ً = ٢و٦٦٦٦٥٧٣٣٩

---

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة الذى يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ميله = ١و٤٨٦٥

م = ظا هـ = ١و٤٨٦٥

هـ = Shift ⟸ tan ١و٤٨٦٥ = ٥٦° ٤َ ١٤ً

---

(٣) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، ٦) ، ب (٥، ٤)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٦}{٥ - ٢} = \frac{-٢}{٣}$$

---

(٤) أوجد قياس الزاوية الموجبة الذى يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ٥$\sqrt{٣}$) ، (٤ ، ٧$\sqrt{٣}$)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}}{٤ - ٢} = \sqrt{٣}$$

م = ظا هـ = $\sqrt{٣}$

هـ = Shift ⟸ tan $\sqrt{٣}$ = ٦٠°

العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين

المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان و العكس صحيح

إذا كان $ل_١ // ل_٢$ فإن $م_١ = م_٢$

و العكس

إذا كان $م_١ = م_٢$ فإن $ل_١ // ل_٢$

العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين

المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميليهما $= -١$ و العكس صحيح

إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$ فإن $م_١ \times م_٢ = -١$

و العكس

إذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$

أحدهما معكوس جمعى ضربى للآخر

مثال $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٢}$

---

(١) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٠) ، (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١، ٤) ، (١ ، ٧)

,

$$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$م_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٤}{١ - (-١)} = \frac{٣}{٢}$$

∵ $م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان

---

(٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١) ، (٦، ص) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أوجد ص

$م = ظا ٤٥° = ١$

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص - (-١)}{٦ - ٢} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{١}{١}$$

ص + ١ = ٤

ص = ٤ - ١

ص = ٣

---

(٦) إذا كان أ (٢، ٢) ، ب (٥ ، ٣) ، جـ (٨، ٤) اثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

$$م_١ \text{ ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٢}{٥ - ٢} = \frac{١}{٣}$$

$$م_٢ \text{ ميل } \overleftrightarrow{بجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٣}{٨ - ٥} = \frac{١}{٣}$$

∵ $م_١ = م_٢$

∴ النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

---

(٧) إذا كانت النقاط (٠، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢، ٥) على استقامة واحدة أوجد أ

∵ النقاط على استقامة واحدة ∴ $م_١ = م_٢$

$$م_١ = \frac{٣ - ١}{أ - ٠} = \frac{٢}{أ}$$

$$م_٢ = \frac{٥ - ١}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

∵ $\frac{٢}{أ} = ٢$ ∴ أ = ١

(٢) اثبت أن المستقيم

المار بالنقطتين (٤ ، $٣\sqrt{٣}$) ، (٥ ، $٢\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

$$\text{م}_١ = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٥ - ٤} = -\sqrt{٣}$$

$$\text{م}_٢ = \text{ظا } ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

∵ $-\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} = -١$

∴ $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$ ∴ المستقيمان متوازيان

---

(٣) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن ك = ...

∵ ميل أى مستقيم أفقى يوازى محور السينات يساوى صفر

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ك} - ٣}{٢ - ٨} = \frac{\text{ك} - ٣}{-٦} = \frac{\text{صفر}}{١}$$

ك - ٣ = ٠ ك = ٣

---

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ يوازى محور الصادات حيث جـ(م ، ٤) ، ء (-٥ ، ٧) فإن م = ...

∵ ميل أى مستقيم أفقى يوازى محور الصادات غير معرف

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٧ - ٤}{-٥ - \text{م}} = \frac{٣}{-٥ - \text{م}} = \frac{١}{\text{صفر}}$$

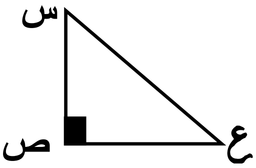
-٥ - م = ٠ م = -٥

(٥) إذا كان المثلث

س ص ع قائم الزاوية فى ص حيث

ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، أ)

أوجد قيمة أ



$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{س ص}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٤} = -٣$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ص ع}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{أ} - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{\text{أ} - ٢}{-٩}$$

∵ المثلث س ص ع قائم الزاوية فى ص

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ متعامدان ∴ $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

$$\frac{-٣}{١} \times \frac{\text{أ} - ٢}{-٩} = \frac{-١}{١}$$

$$\frac{-٣\text{أ} + ٦}{-٩} = \frac{-١}{١}$$

-٣أ + ٦ = ٩

-٣أ = ٩ - ٦

-٣أ = ٣

أ = -١

(٦) إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ،(٢، ك) ، و المستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد

(١) قيمة ك التى تجعل المستقيمين متوازيين

(٢) قيمة ك التى تجعل المستقيمين متعامدين

$$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ك - ١}{٢ - ٣} = \frac{ك - ١}{-١}$$

$$م_٢ = ظا\ هـ = ظا\ ٤٥° = ١$$

إذا كان المستقيمان متوازيين فإن $م_١ = م_٢$

$$\frac{ك - ١}{-١} = \frac{١}{١}$$

$$ك - ١ = -١$$

$$ك = -١ + ١$$

$ك = ٠$ **مطلوب ١**

إذا كان المستقيمان متعامدان $\therefore م_١ \times م_٢ = -١$

$$\frac{ك - ١}{-١} \times \frac{١}{١} = \frac{-١}{١}$$

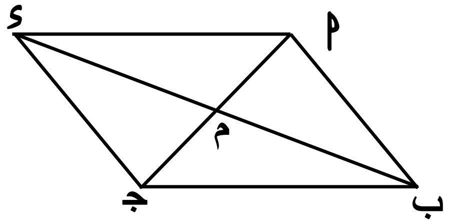
$$\frac{ك - ١}{-١} = \frac{-١}{١}$$

$$ك - ١ = ١$$

$$ك = ١ + ١$$

$ك = ٢$ **مطلوب ٢**

(٧) إذا كان أ (٧، ٣) ، ب (٣، ١) ،جـ (١، ٢) ، ء (٥، ٤) اثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع



$$م_١\ ميل\ \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{٣ - ٧} = \frac{١}{٢}$$

$$م_٢\ ميل\ \overleftrightarrow{جـ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٢}{٥ - ١} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore م_١ = م_٢ \quad \therefore \overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$ ①

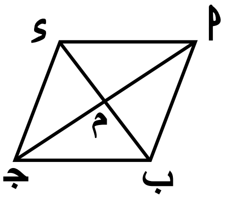
$$م_٣\ ميل\ \overleftrightarrow{أ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٣}{٥ - ٧} = \frac{-١}{٣}$$

$$م_٤\ ميل\ \overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = \frac{-١}{٣}$$

$\because م_٣ = م_٤ \quad \therefore \overleftrightarrow{أ ء} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

(٨) إذا كان ﻡ (٣، ٢) ، ب (٤، −٣) ،جـ(−١، −٢) ، ء(−٢، ٣) اثبت أن الشكل ﻡ ب جـ ء معين



م_1 ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-3-2}{4-3} = -5$

م_2 ميل $\overleftrightarrow{\text{جء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{3-(-2)}{-2-(-1)} = -5$

∵ $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} // \overleftrightarrow{\text{جء}}$ ①

م_3 ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{3-2}{-2-3} = \frac{-1}{5}$

م_4 ميل $\overleftrightarrow{\text{بجـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-2-(-3)}{-1-4} = \frac{-1}{5}$

∵ $\text{م}_3 = \text{م}_4$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡء}} // \overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل ﻡ ب جـ ء متوازى أضلاع ③

م_5 ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡجـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{-2-2}{-1-3} = 1$

م_6 ميل $\overleftrightarrow{\text{بء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{3-(-3)}{-2-4} = -1$

∵ $\text{م}_5 \times \text{م}_6 = 1 \times -1 = -1$

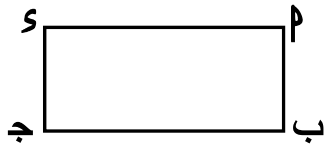
∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡجـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{بء}}$ ④

من ٣ ، ٤

∴ ﻡ ب جـ ء متوازى أضلاع قطراه متعامدان

∴ ﻡ ب جـ ء معين

(٩) إذا كان ﻡ (−١، ٣) ، ب (٥، ١) ،جـ(٦، ٤) ، ء(٠، ٦) اثبت أن الشكل ﻡ ب جـ ء مستطيل



م_1 ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{1-3}{5-(-1)} = \frac{-1}{3}$

م_2 ميل $\overleftrightarrow{\text{جء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{6-4}{0-6} = \frac{-1}{3}$

∵ $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} // \overleftrightarrow{\text{جء}}$ ①

م_3 ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{6-3}{0-(-1)} = 3$

م_4 ميل $\overleftrightarrow{\text{بجـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{4-1}{6-5} = 3$

∵ $\text{م}_3 = \text{م}_4$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡء}} // \overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل ﻡ ب جـ ء متوازى أضلاع ③

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} \times$ ميل $\overleftrightarrow{\text{بجـ}} = \frac{-1}{3} \times 3 = -1$

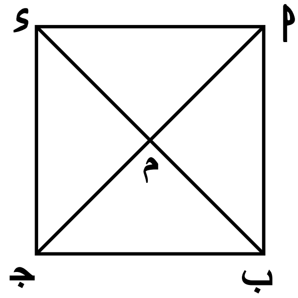
∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻡب}} \perp \overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ④

من ٣ ، ٤

∴ ﻡ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان

∴ ﻡ ب جـ ء مستطيل

(١٠) إذا كان أ (٢، ٤) ، ب (-٣، ٠) ،جـ(-٧، ٥) ، ء(-٢، ٩) اثبت أن الشكل أب جـ ء مربع



$\frac{٢-١}{١-٣}$ $\frac{٩-٥}{٥-١}$ $\frac{٩-٤}{٥-٧}$

$م_١$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ٤}{-٣ - ٢} = \frac{٤}{٥}$

$م_٢$ ميل $\overleftrightarrow{جـ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ٥}{-٢ - (-٧)} = \frac{٤}{٥}$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$ ①

$م_٣$ ميل $\overleftrightarrow{أ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ٤}{-٢ - ٢} = \frac{-٥}{٤}$

$م_٤$ ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٠}{-٧ - (-٣)} = \frac{-٥}{٤}$

∵ $م_٣ = م_٤$ ∴ $\overleftrightarrow{أ ء} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع ③

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{٤}{٥} \times \frac{-٥}{٤} = -١$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$ ④

$م_٥$ ميل $\overleftrightarrow{أ جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٤}{-٧ - ٢} = \frac{-١}{٩}$

$م_٦$ ميل $\overleftrightarrow{ب ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ٠}{-٢ - (-٣)} = ٩$

∵ $م_٥ \times م_٦ = \frac{-١}{٩} \times ٩ = -١$

∴ $\overleftrightarrow{أ جـ} \perp \overleftrightarrow{ب ء}$ ⑤

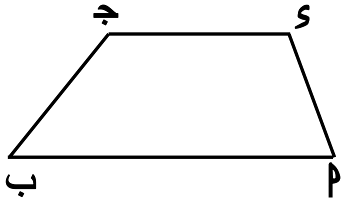
من ٣ ، ٤ ، ٥

∴ أب جـ ء متوازى أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان و قطراه متعامدان

∴ أب جـ ء مربع

---

(١١) إذا كان أ (٧، ٤) ، ب (٣، -٢) ،جـ(٢، ٠) ، ء(٤، ٣) اثبت أن الشكل أب جـ ء شبه منحرف



$م_١$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢ - ٤}{٣ - ٧} = \frac{٣}{٢}$

$م_٢$ ميل $\overleftrightarrow{جـ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٤ - ٢} = \frac{٣}{٢}$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$ ①

$م_٣$ ميل $\overleftrightarrow{أ ء} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٤}{٤ - ٧} = \frac{١}{٣}$

$م_٤$ ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - -٢}{٢ - ٣} = -٢$

∵ $م_٣ \neq م_٤$ ∴ $\overleftrightarrow{أ ء}$ لا يوازى $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ②

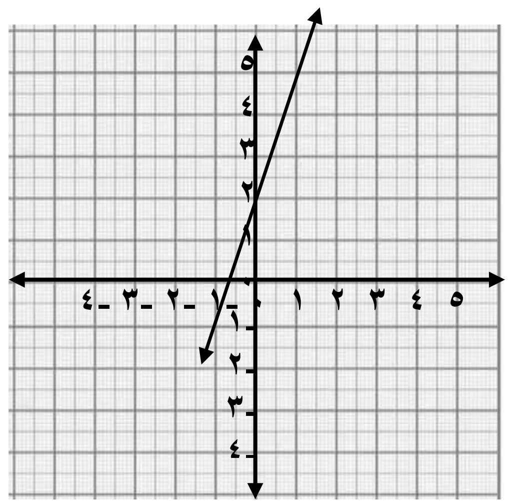
من ١ ، ٢ ∴ الشكل أب جـ ء شبه منحرف

معادلة الخط المستقيم

مثل بيانياً الخط المستقيم الممثل للمعادلة
ص = ٣ س + ٢
ثم احسب ميل الخط المستقيم
و استنتج من الرسم الجزء المقطوع من محور الصادات

الحل
بفرض س = ٠
ص = ٣ ×(٠) + ٢= ٢ (٠ ، ٢)

بفرض س = ١
ص = ٣ ×(١) + ٢= ٥ (١ ، ٥)



الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ٢}{١ - ٠}$ = ٣

و نلاحظ من الرسم أن الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢ وحدة طول فى الاتجاه الموجب من محور الصادات

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

ص = م س + جـ

حيث م هو ميل الخط المستقيم

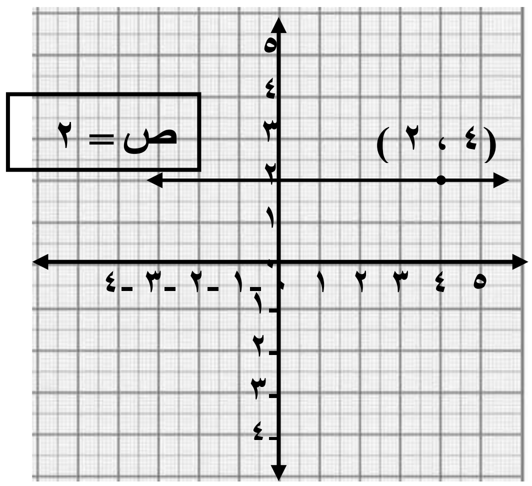
، جـ هو الجزء من محور الصادات

و المستقيم يقطع محور ص فى (٠ ، جـ)

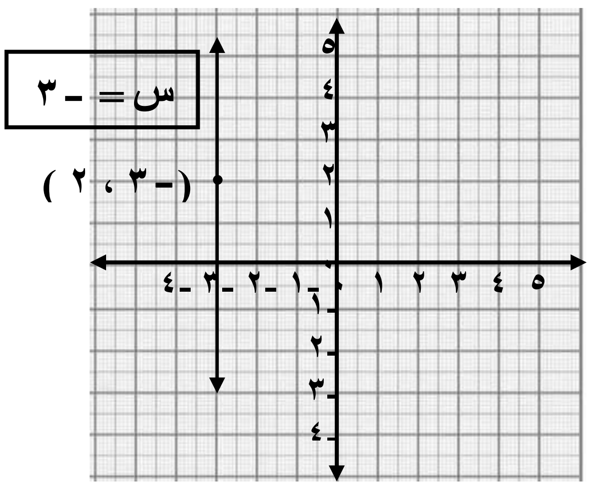
ملحوظات هامة

(١) معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل
ص = م س
لأنه عندما يمر المستقيم بنقطة الأصل يكون طول الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر
لذلك تكون قيمة جـ = صفر
لذلك نحذف جـ من المعادلة

(٢) معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (م ، جـ) ص = جـ



(٣) معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات و يمر بالنقطة (ب ، ل) س = ب



(١) أكتب المعادلات الآتية

(١) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٤ و يقطع ٥ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

ص = ٤ س + ٥

(٢) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٣ و يقطع ٦ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور الصادات

ص = ٣ س − ٦

(٣) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٥ و يمر بنقطة الأصل

ص = ٥ س

(٤) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى ميله صفر و يقطع ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

ص = ٣

(٥) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (−٢ ، − ٥)

ص = − ٥

(٦) اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يوازى محور الصادات و يمر بالنقطة (−٢ ، − ٥)

س = − ٢

(٢) اكتب الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية

(١) ص = ٢ س + ٤
الميل = ٢ و الجزء المقطوع ٤ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

(٢) ١٠ = −٢ص − ٦ س
يجب وضع المعادلة فى الصورة العامة
ص = م س + جـ

٢ص = − ٦ س − ١٠ (÷ ٢)
ص = −٣ س − ٥
الميل = −٣ و الجزء المقطوع ٥ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور الصادات

(٣) عين نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات ٣ س + ٦ ص = ١٢

لتعيين الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠

٣ س + ٦ × (٠) = ١٢
٣ س = ١٢ (÷ ٣)
س = ٤

لتعيين الجزء المقطوع من محور الصادات نضع س= ٠

٣ × (٠) + ٦ ص = ١٢
٦ ص = ١٢ (÷ ٦)
ص = ٢

المستقيم يقطع محور السينات فى (٤ ، ٠)
و يقطع محور الصادات فى (٠ ، ٢)

(٤) اوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٥ ويمر بالنقطة (١ ، ٢)

ص = م س + جـ

∵ م = ٥ ∴ ص = ٥ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٢)

٢ = ٥ × (١) + جـ

٢ = ٥ + جـ

٢ - ٥ = جـ

- ٣ = جـ

المعادلة المطلوبة ص = ٥ س - ٣

---

(٥) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة(٠، - ٧) و يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

ص = م س + جـ

∵ الميل = ظا ٤٥° = ١

∴ ص = ١ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (٠ ، - ٧)

- ٧ = ١ × (٠) + جـ

- ٧ = ٠ + جـ

- ٧ = جـ

المعادلة المطلوبة ص = س - ٧

---

(٦) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين(٤ ، ٢)، (- ٢ ، - ١) ثم اثبت انه يمر بنقطة الأصل

ص = م س + جـ

∵ الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-١ - ٢}{-٢ - ٤} = \frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ **س + جـ**

بالتعويض بالنقطة (٤ ، ٢)

٢ = $\frac{١}{٢}$ **× (٤) + جـ ∴ ٢ = ٢ + جـ**

٢ - ٢ = جـ ∴ جـ = صفر

∴ المستقيم يمر بنقطة الأصل

المعادلة المطلوبة ص = $\frac{١}{٢}$ **س**

---

(٧) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٥) و يوازى المستقيم س + ٢ ص - ٧ = ٠

ص = م س + جـ

س + ٢ ص - ٧ = ٠

٢ ص = - س + ٧ (÷ ٢)

ص = $\frac{-١}{٢}$ **س +** $\frac{٧}{٢}$

م١ ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-١}{٢}$

∵ المستقيمان متوازيان

∴ م١ = م٢ = $\frac{-١}{٢}$

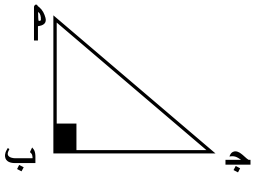
∴ ص = $\frac{-١}{٢}$ **س + جـ بالتعويض بالنقطة (٣ ، - ٥)**

- ٥ = $\frac{-١}{٢}$ **× (٣) + جـ ∴ - ٥** = $\frac{-٣}{٢}$ **+ جـ**

- ٥ + $\frac{٣}{٢}$ **= جـ ∴ جـ** = $\frac{-٧}{٢}$

المعادلة المطلوبة ص = $\frac{-١}{٢}$ **س -** $\frac{٧}{٢}$

(٨) ٩ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه ٩ (١ ، ٤) ، ب (– ١ ، – ٢) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$



$\boxed{\text{ص = م س + جـ}}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{٩ب}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{-٢ - ٤}{-١ - ١}$ = ٣

م$_١$ ميل المستقيم المعلوم = ٣

∵ المستقيمان متعامدان

∴ م$_٢$ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٣}$

∵ ص = $\frac{-١}{٣}$ س + جـ

∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة ب (– ١ ، – ٢)

– ٢ = $\frac{-١}{٣}$ × (– ١) + جـ

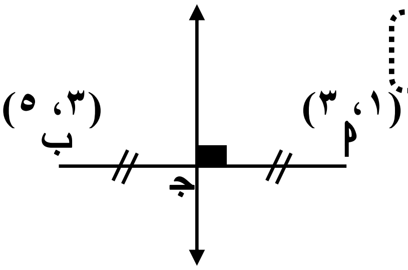
– ٢ = $\frac{١}{٣}$ + جـ

– ٢ – $\frac{١}{٣}$ = جـ ∴ جـ = $\frac{-٧}{٣}$

المعادلة المطلوبة ص = $\frac{-١}{٣}$ س – $\frac{٧}{٣}$

(٩) إذا كان ٩ (١ ، ٣)، ب (٣ ، ٥) أوجد معادلة المستقيم العمودى $\overline{\text{٩ب}}$ على من منتصفها (معادلة محور تماثل $\overline{\text{٩ب}}$)

$\boxed{\text{ص = م س + جـ}}$



بفرض جـ هى منتصف ٩ب

جـ = $\left(\frac{\text{س}_١+\text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١+\text{ص}_٢}{٢}\right)$

جـ = $\left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢}\right)$ = (٢ ، ٤)

ميل $\overleftrightarrow{\text{٩ب}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{٥ - ٣}{٣ - ١}$ = ١

م$_١$ ميل المستقيم المعلوم = ١

∵ المستقيمان متعامدان

∴ م$_٢$ ميل المستقيم المطلوب = – ١

∵ ص = – ١ س + جـ

∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة جـ (٢ ، ٤)

∴ ٤ = – ١ × (٢) + جـ

٤ = – ٢ + جـ

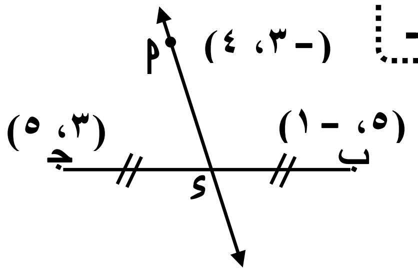
٤+٢ = جـ

٦ = جـ

المعادلة المطلوبة ص = – س + ٦

(١٠) إذا كان ٲ (−٣ ، ٤)، ب (٥ ، −١) ، جـ (٣ ، ٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة ٲ و بنقطة منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

$\boxed{\text{ص} = \text{م س} + \text{جـ}}$



بفرض ء هى منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

$$\text{ء} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢} \right)$$

$$\text{ء} = \left(\frac{٥+٣}{٢} ، \frac{-١+٥}{٢} \right) = (٤ ، ٢)$$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (−٣، ٤) ، (٤ ، ٢)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ٲء}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٢ - ٤}{٤ - (-٣)} = \frac{-٢}{٧}$$

$\because$ ص $= \frac{-٢}{٧}$ س + جـ

$\because$ **المستقيم المطلوب يمر بالنقطة ٲ(−٣، ٤)**

$\therefore$ $٤ = \frac{-٢}{٧} \times (-٣) +$ جـ

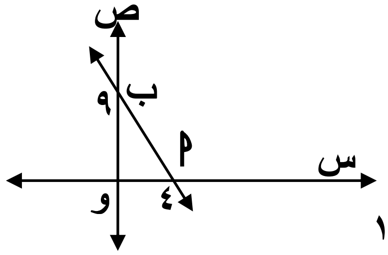
$٤ = \frac{٦}{٧} +$ جـ

$\frac{-٦}{٧} + ٤ =$ جـ

جـ $= \frac{٢٢}{٧}$

المعادلة المطلوبة ص $= \frac{-٢}{٧}$ س $+ \frac{٢٢}{٧}$

(١١) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى و الصادى جزأين موجبين طوليهما ٤ ، ٩ على الترتيب ثم احسب مساحة المثلث المحصور بين المستقيم و محورى الإحداثيات



المعادلة المطلوبة
من الرسم مباشرة

$$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٩} = ١$$

حل آخر للمعادلة

$\because$ **المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٩)**

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ٲب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٩ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{-٩}{٤}$$

$\because$ ص = م س + جـ

$\therefore$ ص $= \frac{-٩}{٤}$ س + جـ

$\because$ **المستقيم المطلوب يمر بالنقطة ب (٠ ، ٩)**

$\therefore$ $٩ = \frac{-٩}{٤} \times (٠) +$ جـ

$\therefore$ جـ = ٩

المعادلة المطلوبة ص $= \frac{-٩}{٤}$ س + ٩

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ **طول القاعدة × الإرتفاع**

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ **وٲ × وب**

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٩ =$

١٨ وحدة مساحة مربعة

(١٢) اوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات
٣ س - ٤ ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠

أولاً س = ٠ يمثل محور الصادات

، ص = ٠ يمثل محور السينات

ثانياً تحديد نقط تقاطع المستقيم ٣س - ٤ص = ١٢

مع محورى الإحداثيات

(نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات)

بوضع ص = ٠

٣س - ٤ × (٠) = ١٢

٣س = ١٢ (÷ ٣)

س = ٤ (٤ ، ٠)

(نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات)

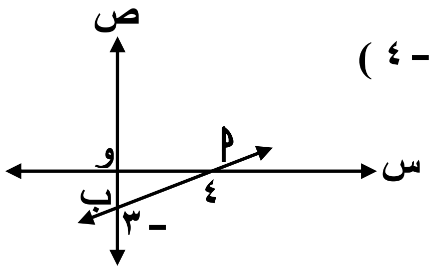
بوضع س = ٠

٣ × (٠) - ٤ص = ١٢

- ٤ ص = ١٢ (÷ - ٤)

ص = - ٣

(٠ ، - ٣)



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × وم × وب

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣ =

٦ وحدة مساحة مربعة

(١٣) اوجد الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ $\boxed{× ٦}$

٣ س + ٢ ص = ٦

٢ ص = - ٣ س + ٦ $\boxed{÷ ٢}$

ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣

الميل = $\frac{-٣}{٢}$ و الجزء المقطوع من محور

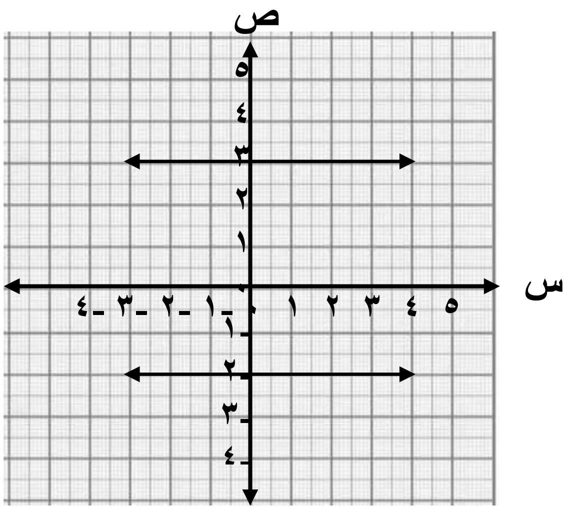
الصادات ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب

---

(١٤) اوجد البعد العمودى بين المستقيمين
ص - ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠

∵ ص - ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

∵ ص + ٢ = ٠ ∴ ص = - ٢



البعد = ٥ وحدات طول

(١٥) إذا كانت معادلتى المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ هما على الترتيب

ٯ س - ٢ ص + ٣ = ٠ ،

٦ س + ٣ ص - ٥ = ٠

= ٠ فاوجد

(١) قيمة ل التى تجعل المستقيمين متوازيين

(٢) قيمة ل التى تجعل المستقيمين متعامدين

(٣)إذا كانت النقطة (١ ، ٥) تقع على المستقيم $ل_1$ فاوجد قيمة ٯ

الحل

ٯ س - ٢ ص + ٣ = ٠

-٢ ص = - ٯ س - ٣ (÷ - ٢)

ص = $\frac{ٯ}{٢}$ س - $\frac{٣}{٢}$ $م_1 = \frac{ٯ}{٢}$

٦ س + ٣ ص - ٥ = ٠

٣ ص =-٦ س + ٥ (÷ ٣)

ص =-٢ س + $\frac{٥}{٣}$ ∴ $م_2$ =-٢

عندما يكون المستقيمان متوازيان $م_1 = م_2$

∴ $\frac{ٯ}{٢} = \frac{-٢}{١}$

∴ ٯ = - ٤ **مطلوب ١**

عندما يكون المستقيمان متعامدان $م_1 \times م_2 = -١$

$\frac{ٯ}{٢} \times \frac{-٢}{١} = \frac{-١}{١}$

$\frac{-٢ٯ}{٢} = \frac{-١}{١}$

-٢ ٯ = - ٢ (÷ - ٢)

ٯ = ١ **مطلوب ٢**

المستقيم

ٯ س - ٢ ص + ٣ = ٠

يمر بالنقطة (١ ، ٥) وبالتعويض

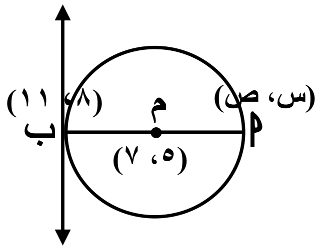
ٯ × (١) - ٢ × (٥) + ٣ = ٠

ٯ - ١٠ + ٣ = ٠

ٯ - ٧ = ٠

ٯ = ٧ **مطلوب ٣**

(١٦) $\overline{\text{أب}}$ قطر فى دائرة مركزها م
فإذا كانت ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فاوجد
(١) إحداثى أ
(٢) طول نصف قطر الدائرة
(٣) معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{أب}}$ من نقطة ب



∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة
∴ م منتصف $\overline{\text{أب}}$
بفرض أ (س ، ص)

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

$$م = \left(\frac{س + ٨}{٢} ، \frac{ص + ١١}{٢}\right) = (٥ ، ٧)$$

$$\frac{س + ٨}{٢} = \frac{٥}{١} \qquad \frac{ص + ١١}{٢} = \frac{٧}{١}$$

س + ٨ = ١٠ ص + ١١ = ١٤

س = ١٠ - ٨ ص = ١٤ - ١١

س = ٢ ص = ٣

∴ أ = (٢ ، ٣) **مطلوب ١**

$$مب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$مب = \sqrt{(٨ - ٥)^٢ + (١١ - ٧)^٢}$$

مب = ٥ وحدة طول **مطلوب ٢**

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١١ - ٣}{٨ - ٢} = \frac{٤}{٣}$$

∴ ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{-٣}{٤}$

∵ ص = م س + جـ

$$∴ ص = \frac{-٣}{٤} س + جـ$$

∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة ب (٨ ، ١١)

$$∴ ١١ = \frac{-٣}{٤} \times (٨) + جـ$$

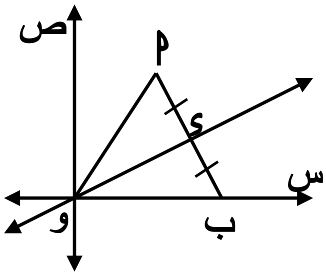
١١ = - ٦ + جـ ∴ ١١ + ٦ = جـ

∴ جـ = ١٧

المعادلة المطلوبة $ص = \frac{-٣}{٤} س + ١٧$ **مطلوب ٣**

---

(١٧) أبو مثلث متساوى الأضلاع
ء منتصف $\overline{\text{أب}}$
أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$



فى المثلث أبو متساوى الأضلاع

ق (∠ أ و ب) = ٦٠ °

∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ $\overline{\text{وء}} \perp \overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{وء}}$ ينصف (∠ أ و ب)

∴ ق (∠ ء و ب) = ٣٠ °

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ءو}} = ظا هـ = ظا ٣٠ ° = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل ∴ جـ = صفر

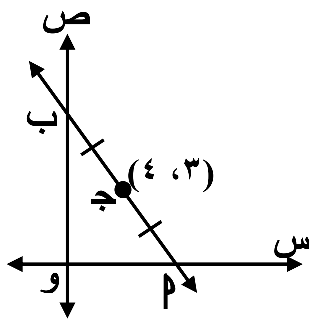
∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$

$$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٣} س$$

(١٨) فى الشكل المقابل

جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

أوجد ما يأتى



(١) إحداثي أ ، ب

∵ نقطة أ تقع على محور السينات ∴ أ (س ، ٠)

∵ نقطة ب تقع على محور الصادات ∴ ب (٠ ، ص)

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{٢}\right)$$

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}+٠}{٢} \text{ ، } \frac{٠+\text{ص}}{٢}\right) = (٣ \text{ ، } ٤)$$

$$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٣}{١} \quad \Big| \quad \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{٤}{١}$$

$$\text{س} = ٦ \quad \Big| \quad \text{ص} = ٨$$

∴ أ (٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨)

(٢) محيط المثلث أب و

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$\text{أب} = \sqrt{(٠ - ٦)^2 + (٨ - ٠)^2}$$

أب = ١٠ وحدة طول

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

= أب + ب و + أ و

= ١٠ + ٨ + ٦ = ٢٤ وحدة طول

(٣) ميل كل من أ و ، ب و

∵ أ و محور السينات ∴ الميل = صفر

∵ ب و محور الصادات ∴ الميل غير معرف

(٤) جـ هى مركز الدائرة المارة بالنقط ...،...،...

جـ هى مركز الدائرة المارة بالنقط أ ،ب، و

لأن جـ أ = جـ ب = جـ و

لأن المثلث أب و قائم الزاوية فى و

، و جـ متوسط خارج من رأس القائمة = نصف طول الوتر $\overline{\text{أب}}$

(٥) معادلة كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمر بالنقط أ (٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٨ - ٠}{٠ - ٦} = \frac{-٤}{٣}$$

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع محور الصادات فى (٠ ، ٨)

$$\text{معادلة } \overleftrightarrow{\text{أب}} \quad \text{ص} = \frac{-٤}{٣}\text{س} + ٨$$

$\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ يمر بالنقط جـ (٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{جـ و}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٠ - ٤}{٠ - ٣} = \frac{٤}{٣}$$

$\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

$$\text{معادلة } \overleftrightarrow{\text{جـ و}} \quad \text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س}$$